DS 7

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 :

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sin(k)}$.

Exercice 2 :

Donner un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $f(x) = e^{\cos x} - \sqrt{1+x}$.

Problème : Fonctions holomorphes

Partie I : Dérivabilité dans $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{C}$.

Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est dérivable en z_0 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \in \Omega \setminus \{z_0\}]{z \rightarrow z_0} \ell$. Dans ce cas, on note $\ell = f'(z_0)$ ou bien $\ell = \left(\frac{d(f(z))}{dz} \right) (z_0)$. On

dit que ℓ est la dérivée de f en z_0 .

Il importe de remarquer que cette définition n'est pas contenue dans votre cours. Dans ce dernier en effet, la notion usuelle de dérivabilité concerne des applications définies sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Ainsi, votre cours ne fournit aucun résultat concernant cette nouvelle notion de dérivabilité.

On dit que f est holomorphe si et seulement si f est dérivable en tout point de Ω .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est k fois dérivable, ou bien qu'elle est de classe D^k sur Ω si et seulement si les dérivées successives de f sont définies jusqu'à l'ordre k sur Ω . On notera $f^{(k)}$ la dérivée k -ième.

On dit que f est de classe C^k sur Ω si et seulement si f est D^k sur Ω et si $f^{(k)}$ est continue.

On dit que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1°) Montrer que la notion de "limite lorsque z tend vers z_0 en appartenant à $\Omega \setminus \{z_0\}$ " a bien un sens.

2°) Dans cette question, on suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$.

Soit $z_1, z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application $t \mapsto f(tz_0 + (1-t)z_1)$ est dérivable sur l'intervalle réel $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.

Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, f n'est pas dérivable en z_0 .

On note $H(\Omega)$ l'ensemble des applications holomorphes sur Ω .

3°) Montrer que $H(\Omega)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que l'application
$$\begin{array}{ccc} H(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C}^\Omega \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$
 est linéaire.

4°) Soit $z_0 \in \Omega$. Montrer que f est dérivable en z_0 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que, lorsque z tend vers z_0 avec $z \in \Omega$, $f(z) = f(z_0) + \ell(z - z_0) + o(z - z_0)$ et que dans ce cas, $\ell = f'(z_0)$.

Montrer que si f est dérivable en z_0 , alors f est continue en z_0 .

5°) Si $f, g \in H(\Omega)$, montrer que fg est une application holomorphe sur Ω et calculer $(fg)'$. Si de plus, pour tout $z \in \Omega$, $g(z) \neq 0$, montrer que $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω et calculer $\left(\frac{f}{g}\right)'$.

6°) Montrer que toute application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. On note $R(Q)$ l'ensemble des racines de Q . Montrer que $\frac{P}{Q}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus R(Q)$.

7°) Soit $f \in H(\Omega)$. Soit $g \in H(U)$, où U est un ouvert contenant $f(\Omega)$. Montrer que $g \circ f$ est holomorphe sur Ω et calculer $(g \circ f)'$.

Partie II : Dérivabilité des séries entières.

8°) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, on pose $g(z) = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$ et on pose $g(z_0) = nz_0^{n-1}$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{C}$.

Lorsque $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $B_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| < r\}$ et $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq r\}$. Il s'agit des boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r . Lorsque $r = +\infty$, on convient que $B_o(a, r) = \mathbb{C} = B_f(a, r)$.

9°) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $z \in B_o(z_0, r)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n - z_0^n| \leq n|z - z_0|(|z_0| + r)^{n-1}$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelée la série entière associée à la suite (a_n) . Son domaine de définition est l'ensemble des complexes z tels que la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

On admettra que dans cette situation, on dispose de la propriété suivante (démontrée en devoir maison) : il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

On dit que R est le rayon de convergence de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

10°) Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$z \mapsto \sum z^n, \quad z \mapsto \sum \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad z \mapsto \sum \frac{z^n}{2^n + n^2}.$$

11°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Montrer que les séries entières

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n \quad \text{ont le même rayon de convergence.}$$

Lorsque K est une partie compacte de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues, définies sur K et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{z \in K} |f(z)|$.

On admettra que $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé de Banach (démontré en TD). On rappelle que, pour toute série de vecteurs d'un espace vectoriel normé de Banach, si elle est absolument convergente, alors elle est convergente.

12°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. On note R le rayon de convergence de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que $R > 0$.

On souhaite montrer que $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $B_o(0, R)$ et que, pour tout

$$z \in B_o(0, R), \quad \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Soit $z_0 \in B_o(0, R)$. Soit $r \in]0, R - |z_0|[$.

a) On pose $K = B_f(z_0, r)$. Montrer que K est un compact inclus dans $B_o(0, R)$.

b) Pour tout $z \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{on pose } g_n(z) = a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \text{ lorsque } z \neq z_0 \text{ et } g_n(z_0) = n a_n z_0^{n-1}.$$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} g_n$ est une série de vecteurs de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ qui est absolument convergente.

c) Conclure.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$.

On dit que f est développable en série entière sur Ω si et seulement si, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes tels que

- $B_o(z_0, r) \subset \Omega$;
- r est inférieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $z \mapsto \sum a_n z^n$;
- Pour tout $z \in B_o(z_0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

13°) Montrer que si f est une application développable en série entière sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, alors elle est de classe C^∞ sur Ω .

Partie III : $C^1 \implies C^\infty$.

Lorsque g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on suppose 2π -périodique et continue, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-int} dt$. Il s'agit du n -ième coefficient de Fourier de g .

14°) On suppose que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est 2π -périodique et de classe C^1 .
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g') = inc_n(g)$.

Ω désigne à nouveau un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose de classe C^1 sur Ω . On fixe $z_0 \in \Omega$ et $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $B_o(z_0, R) \subset \Omega$. Pour tout $r \in]0, R[$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_r(t) = f(z_0 + re^{it})$.

15°) Soit $r \in]0, R[$. Montrer que g_r est 2π -périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Donnez une expression de g'_r .

Pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose $d_n(r) = c_n(g_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-int} dt$.

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n est dérivable sur $]0, R[$ et que, pour tout $r \in]0, R[$, $d'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} f'(z_0 + re^{it})e^{-int} dt$ (c'est une application simple d'un théorème d'interversion entre dérivée et intégrale que vous verrez l'année prochaine).

16°) Montrer que, pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{Z}$, $d'_n(r) = \frac{n}{r} d_n(r)$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $r \in]0, R[$, $d_n(r) = r^n a_n$.

17°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, $a_n = 0$.

On admet le théorème de Dirichlet suivant, démontré en devoir maison :

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application 2π -périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=-n}^n c_k(g)e^{ikt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(t)$.

On admet également que $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = 2\pi f(z_0)$ (c'est une application simple d'un théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, que vous verrez l'année prochaine).

18°) Montrer que, pour tout $z \in B_o(z_0, R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

19°) Montrer que toute application de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est développable en série entière sur Ω .

20°) Soit f et g deux applications développables en séries entières sur $\mathbb{C}$ en entier. Montrer que $g \circ f$ est également développable en série entière sur $\mathbb{C}$.