DM 47 :
Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le samedi 12 avril.

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel.

Partie I : Polynômes de Bernstein

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $B_{n,k}(X)$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ suivant :

$$B_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k}.$$

1°) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$.
Déterminer le degré de $B_{n,k}$ ainsi que ses racines et leurs multiplicités.

2°) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$B_{n,k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^j.$$

3°) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $X^k = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}(X)$.

4°) On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que la famille $(B_{n,k})_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5°) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, montrer que

$$\int_0^1 B_{n,k}(t)\, dt = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}.$$

6°) Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose $Q(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha_j B_{n,j} \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que $Q'(X) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \binom{n-1}{j} B_{n-1,j}$.

7°) On reprend les notations de la question précédente.
Montrer que, pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$,

$$Q^{(r)}(X) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+k} \right) \binom{n-r}{j} B_{n-r,j}.$$

Partie II : Théorème de Stone-Weierstrass

Pour toute la suite du problème, on suppose que n est un entier strictement positif.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Ceci définit une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}$. On ne demande pas de démontrer cette propriété connue.
Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on pose

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

On identifie un polynôme formel à coefficients réels avec son application polynomiale.
Ainsi, $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}$.

8°) Calculer $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$.

9°) Montrer que B_n est un endomorphisme continu sur $\mathcal{C}$.

10°) Dans cette seule question, on suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = e^x$.
Calculer $B_n(f)$ et vérifier que, pour tout $x \in [0, 1]$, $B_n(f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

11°) Soit $\delta > 0$ et $x \in [0, 1]$. On pose

$$S_{n,\delta}(x) = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

En utilisant la question 8, montrer que $0 \le S_{n,\delta}(x) \le \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

12°) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et $\delta > 0$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\|f\| S_{n,\delta}(x) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| < \delta}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

En déduire que, dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, \|.\|)$, $B_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.
Ceci prouve que toute application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. C'est encore vrai pour des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Il s'agit du théorème de Stone-Weierstrass.

13°) Soit $f \in \mathcal{C}$. Déduire de la question précédente que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\ dt.$$

14°) Soit $f \in \mathcal{C}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0$.
Montrer que $f = 0$.

Partie III : Convergence uniforme des dérivées

Dans cette partie, on fixe une application f dans $\mathcal{C}$.

15°) Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$. Donner une expression de $[B_n(f)]^{(r)}$, c'est-à-dire de la dérivée à l'ordre r du polynôme $B_n(f)$.
Lorsque f est croissante, montrer que $B_n(f)$ est croissante.
Lorsque f est convexe, montrer que $B_n(f)$ est convexe.

16°) On suppose que f est de classe C^1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N,\ \ \forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \ \left| (n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

17°) En déduire que, si f est de classe C^1, alors dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, \|.\|)$, $[B_n(f)]' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'$.

18°) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et g une application de classe C^r de $[0,r]$ dans $\mathbb{R}$.
a) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à r, tel que pour tout $k \in \{0, \ldots, r\}$, $P(k) = g(k)$.
b) Montrer qu'il existe $x \in]0, r[$ tel que $g^{(r)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} g(k)$.

19°) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si f est de classe C^r, alors dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, \|.\|)$, $[B_n(f)]^{(r)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{(r)}$.

Partie IV : Vitesse de convergence vers f

Dans cette partie, on fixe une application f dans $\mathcal{C}$.
Pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+$, on pose $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \ / \ (x, y \in [0,1]) \wedge (|x-y| \leq \delta)\}$.
Ainsi ω est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

20°) Montrer que ω est correctement définie, qu'elle est croissante et bornée.

21°) Montrer que pour tout $\delta \geq 0$, il existe $(x, y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta)$.

22°) Montrer que $\omega(\delta) \underset{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}}{\longrightarrow} 0$.

23°) Pour tout $\delta > 0$ et $x, y \in [0,1]$, montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \omega(\delta)\Big(1 + \dfrac{|x-y|^2}{\delta^2}\Big)$.

24°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f - B_n(f)\| \leq \dfrac{5}{4}\omega\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.
En déduire à nouveau que $B_n(f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$.