DS 7 : un corrigé

Exercice 1 :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sin k}$.
Pour $k = 1$, $\sin 1 > 0$, donc a_1 est bien défini.
Pour $k \geq 2$, $\sqrt{k} + \sin k \geq \sqrt{k} - 1 > 0$, donc a_k est défini.
Lorsque k tend vers $+\infty$, $\sin(k) = O(1) = o(\sqrt{k})$, donc $a_k \sim k^{-\frac{1}{2}}$.
$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{k}(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - 1) = \sqrt{k}(\frac{1}{2k} + o(\frac{1}{k})) \sim \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}$.
$\sum k^{-\frac{1}{2}}$ est une série de Riemann divergente car $\frac{1}{2} \leq 1$, donc d'après le theorème de sommation des équivalents, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sim 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(\sqrt{n+1} - 1)$.
Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sin k} \sim 2\sqrt{n}}$.

Exercice 2 :

$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = e(e^u)$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, or au voisinage de 0,
$e^u = 1 + u + O(u^2)$, donc $e^{\cos x} = e(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4))$.
D'autre part, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)\frac{x^3}{6} + o(x^3)$,
donc $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.
On en déduit que $\boxed{f(x) = (e-1) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}(4e - 1) - \frac{x^3}{16} + o(x^3)}$.

Problème : Fonctions holomorphes

Partie I : Dérivabilité dans $\mathbb{C}$.

1°) D'après le cours, il s'agit de montrer que z_0 appartient à l'adhérence de $\Omega \setminus \{z_0\}$, c'est-à-dire que z_0 est un point d'accumulation de Ω.
Soit $V \in \mathcal{V}(z_0)$. Il existe $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(z_0, \varepsilon') \subset V$. De plus, Ω est un ouvert, donc il existe $\varepsilon'' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(z_0, \varepsilon'') \subset \Omega$.

Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$. Alors $\varepsilon > 0$ et $B_o(z_0, \varepsilon) \subset V \cap \Omega$. Ainsi, $V \cap (\Omega \setminus \{z_0\})$ contient $B_o(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, qui est non vide, ce qu'il fallait démontrer.

2°) $\diamond$ Soit $t \in [0, 1]$. Posons $g(t) = f(tz_0 + (1-t)z_1)$. t étant réel, $g(t) = t\overline{z_0} + (1-t)\overline{z_1}$. Ainsi, g est une fonction polynomiale de t donc d'après le cours, g est dérivable et $\boxed{g'(t) = \overline{z_0} - \overline{z_1}}$.

$\diamond$ Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, posons $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$.

Ainsi, $z_0 + \frac{1}{n} \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}}{\longrightarrow} z_0$ et $g(z_0 + \frac{1}{n}) = 1$, donc si $g(z) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$, alors $\ell = 1$.

De même, $z_0 + i\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z_0$ et $g(z_0 + i\frac{1}{n}) = -1$, donc si $g(z) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$, alors $\ell = -1$.

Ainsi, la quantité $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'admet pas de limite lorsque z tend vers z_0, donc f n'est pas dérivable en z_0.

3°) Lorsque f est l'application identiquement nulle sur Ω, pour tout $z_0, z \in \Omega$ avec $z \neq z_0$, $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$, donc f est holomorphe sur Ω. Ainsi, $H(\Omega) \neq \emptyset$.

Soit $f, g \in H(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Alors

$$\frac{(\alpha f + g)(z) - (\alpha f + g)(z_0)}{z - z_0} = \alpha \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}}{\longrightarrow} \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$

Ceci prouve que $\alpha f + g \in H(\Omega)$ et que $(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0)$.

Ainsi, on a montré que Ω est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $\begin{array}{ccc} H(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C}^\Omega \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

4°) $\diamond$ On dispose des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est dérivable en } z_0 \iff & \exists \ell \in \mathbb{C},\ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}}{\longrightarrow} \ell \\
\iff & \exists \ell \in \mathbb{C},\ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \ell \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}}{=} o(1) \\
\iff & \exists \ell \in \mathbb{C},\ f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}}{=} (z - z_0)o(1) = o(z - z_0) \\
\iff & \exists \ell \in \mathbb{C},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\
& |z - z_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \\
\iff & \exists \ell \in \mathbb{C},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall z \in \Omega, \\
& |z - z_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| ;
\end{aligned}$$

En effet, pour $z = z_0$, $|f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)| = 0 \leq 0 = \varepsilon |z - z_0|$. Ainsi,

f est dérivable en $z_0 \iff \exists \ell \in \mathbb{C},\ f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}}{=} o(z - z_0)$,

ce qui conclut.

$\diamond$ Supposons que f est dérivable en z_0. Alors

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}}{o}(z - z_0)$, or $z - z_0 \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}}{\longrightarrow} 0$, donc $z - z_0 = o(1)$. Alors $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)o(1) + o(o(1)) = f(z_0) + o(1)$, ce qui prouve que $f(z) \underset{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega}}{\longrightarrow} f(z_0)$, donc f est continue en z_0.

5°) $\diamond$ Soit $f, g \in H(\Omega)$. Soit $z_0 \in \Omega$. Pour $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{fg(z) - fg(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(f(z)g(z) - f(z_0)g(z)) + (f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0))}{z - z_0}\\ &= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + f(z_0)\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\\ &\underset{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega\setminus\{z_0\}}}{\longrightarrow} f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),\end{aligned}$$

d'après les théorèmes usuels sur les limites de fonctions et car g est continue en z_0 d'après la question précédente. Ceci prouve que fg est holomorphe sur Ω et que $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$.

$\diamond$ On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z) \neq 0$. Soit $z_0 \in \Omega$.

$\dfrac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \dfrac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0}\dfrac{1}{g(z)g(z_0)} \underset{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega\setminus\{z_0\}}}{\longrightarrow} -\dfrac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}$, à nouveau car g est continue en z_0. Ceci prouve que $\dfrac{1}{g}$ est holomorphe sur Ω et que $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

$\diamond$ En combinant les deux propriétés précédentes, on en déduit que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g} \in H(\Omega)$ et que $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = f'\dfrac{1}{g} + f\left(-\dfrac{g'}{g^2}\right)$, donc $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}}$.

6°) $\diamond$ Soit $f \in H(\Omega)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $f^n \in H(\Omega)$ et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

Pour $n = 1$, $R(1)$ est évidente.

Supposons $R(n)$. Alors $f^{n+1} = f \times f^n$, donc d'après la question précédente, et l'hypothèse de récurrence, $f^{n+1} \in H(\Omega)$ et $(f^{n+1})' = f' \times f^n + f \times (f^n)' = (n+1)f'f^n$, ce qui prouve $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \in H(\Omega)$ et que $(f^n)' = nf'f^{(n-1)}$.

$\diamond$ En revenant à la définition, il est évident que $z \longmapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que $\dfrac{d(z)}{dz} = 1$. Alors, d'après la propriété précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z \longmapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\dfrac{d(z^n)}{dz} = nz^{n-1}$.

$\diamond$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Posons $P(X) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n X^n$, où (p_n) est une suite presque nulle de complexes. D'après la question 3, $\dfrac{d(P(z))}{dz} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} np_n z^{n-1}$, donc $P \in H(\Omega)$ et P' est encore une application polynomiale. Alors, par récurrence, on en déduit que P est k fois dérivable, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, ce qui prouve, avec la question 4, que P est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$.

$\diamond$ D'après le cours, $R(Q)$ est une partie finie de $\mathbb{C}$, donc c'est un fermé de $\mathbb{C}$. Ainsi, $\mathbb{C} \setminus R(Q)$ est bien un ouvert de $\mathbb{C}$.
D'après la question précédente et ce qui précède, $\dfrac{P}{Q} \in H(\mathbb{C} \setminus R(Q))$ et $\left(\dfrac{P}{Q}\right)' = \dfrac{PQ' - P'Q}{Q^2}$. Cette dernière expression est encore de la forme $\dfrac{P_1}{Q_1}$, où $P_1, Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ avec $R(Q_1) = R(Q)$. Ainsi, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on montre que $\dfrac{P}{Q}$ est k fois dérivable sur $\mathbb{C} \setminus R(Q)$ et que $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{(k)}$ est de la forme $\dfrac{P_k}{Q_k}$ où $P_k, Q_k \in \mathbb{C}[X]$ avec $R(Q_k) = R(Q)$. Ceci prouve que $\dfrac{P}{Q}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus R(Q)$.

7°) D'après l'énoncé, $g \circ f$ est définie sur l'ouvert Ω.
Soit $z_0 \in \Omega$. g est dérivable en $f(z_0)$,
donc $g(u) \underset{\substack{u \to f(z_0) \\ u \in U}}{=} g(f(z_0)) + g'(f(z_0))(u - f(z_0)) + o(u - f(z_0))$
Or $f(z) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}}{=} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}}{\longrightarrow} f(z_0)$ et pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \in U$,
donc le théorème de changement de variable pour la relation "o",
on peut poser $u = f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$ dans la première égalité :
$g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(f(z_0))[f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)] + o(f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0))$.
Or $g'(f(z_0))o(z - z_0) = o(z - z_0)$
et $o(f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)) = o(O(z - z_0) + o(z - z_0)) = o(O(z - z_0)) = o(z - z_0)$,
donc $g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(f(z_0))f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$. Ceci prouve que $g \circ f$ est dérivable en z_0 et que $\boxed{(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0)g'(f(z_0))}$.

Partie II : Dérivabilité des séries entières.

8°) D'après la question 6, $z \longmapsto z^n$ est dérivable en z_0 et $\left(\dfrac{d(z^n)}{dz}\right)(z_0) = n z_0^{n-1}$. Cela signifie que $g(z) = \dfrac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}}{\longrightarrow} n z_0^{n-1} = g(z_0)$, donc g est continue en z_0. De plus, d'après les théorèmes usuels g est continue en tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, donc g est bien continue sur $\mathbb{C}$.

9°) Soit $z \in B_o(z_0, r)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de Bernoulli,
$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$, puis par inégalité triangulaire,
$|z^n - z_0^n| \leq |z - z_0| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |z_0|^{n-1-k}$.
D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, $|z| - |z_0| \leq |z - z_0| < r$, car $z \in B_o(z_0, r)$, donc $|z| \leq |z_0| + r$. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,
$|z|^k |z_0|^{n-1-k} \leq (|z_0| + r)^k |z_0|^{n-1-k} \leq (|z_0| + r)^k (|z_0| + r)^{n-1-k} = (|z_0| + r)^{n-1}$.
On en déduit que $|z^n - z_0^n| \leq n|z - z_0|(|z_0| + r)^{n-1}$.

10°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$\diamond$ $\sum z^n$ est une série géométrique, donc d'après le cours, lorsque $|z| < 1$, $\sum z^n$ converge absolument, et lorsque $|z| > 1$, $|z^n| = |z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum z^n \text{ est égal à } 1}$.

$\diamond$ D'après le cours, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z,

donc $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum \frac{z^n}{n!} \text{ est égal à } +\infty}$.

$\diamond$ $\frac{z^n}{2^n+n^2} \sim \left(\frac{z}{2}\right)^n$ d'après les croissances comparées, donc d'après le premier exemple, lorsque $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, $\sum \frac{z^n}{2^n+n^2}$ est absolument convergente, et lorsque $\left|\frac{z}{2}\right| > 1$, $\left|\frac{z^n}{2^n+n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum \frac{z^n}{2^n+n^2} \text{ est égal à } 2}$.

11°) Notons R le rayon de convergence de la série entière $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$\diamond$ Supposons que $|z| > R$. Alors $z \neq 0$ et
$|(n+1)a_{n+1}z^n| \geq |a_{n+1}z^n| = \frac{1}{|z|}|a_{n+1}z^{n+1}|$, or $|z| > R$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. Alors la suite $(|a_{n+1}z^{n+1}|)$ n'est pas majorée, donc la suite $((n+1)a_{n+1}z^n)$ n'est pas bornée.

$\diamond$ Supposons maintenant que $|z| < R$. Si $z = 0$, $\sum a_n z^n$ est presque nulle donc est absolument convergente. On peut donc supposer que $z \neq 0$.
Il existe $t \in]|z|, R[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$|(n+1)a_{n+1}z^n| = \frac{1}{|z|}|a_{n+1}t^{n+1}|(n+1)\left(\frac{|z|}{t}\right)^{n+1} = o(a_{n+1}t^{n+1})$, d'après les croissances comparées, car $\frac{|z|}{t} \in [0,1[$. Or $t \in [0,R[$, donc $\sum |a_n t^n|$ est convergente, donc par changement de variable, c'est encore le cas pour $\sum |a_{n+1}t^{n+1}|$. Alors, d'après le cours sur les séries à termes positifs, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ est absolument convergente.

Ceci démontre que R est le rayon de convergence de $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

12°) **a)** K est un fermé borné et $\mathbb{C}$ est de dimension finie, donc K est un compact.
Soit $z \in B_f(z_0, r)$. Alors $|z| = |(z-z_0)+z_0| \leq |z-z_0| + |z_0| \leq r + |z_0| < R$, donc $z \in B_o(0,R)$. Ainsi, $B_f(z_0,r) \subset B_o(0,R)$.

b) D'après la question 8, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur K, donc $\sum_{n\geq 1} g_n$ est bien une série de vecteurs de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.
Soit $z \in K = B_f(z_0, r)$. D'après la question 9, lorsque $z \neq z_0$,

$|g_n(z)| \leq n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$. C'est encore vrai lorsque $z = z_0$, donc $n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$ est un majorant de $\{|g_n(z)| \ / \ z \in K\}$, or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc $\|g_n\|_\infty = \sup_{z\in K} |g_n(z)| \leq n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$.

Par ailleurs, d'après la question précédente, la série entière $t \longmapsto \sum (n+1)a_{n+1}t^n$ a pour rayon de convergence R, or $|z_0|+r < R$, donc la série $\sum (n+1)a_{n+1}(|z_0|+r)^n$ est absolument convergente. En passant aux sommes partielles, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$ est convergente, donc d'après le cours, la série $\sum_{n\geq 1} \|g_n\|_\infty$ est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

c) D'après l'énoncé, cette absolue convergence implique la convergence, donc il existe $S \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ tel que $\sum_{k=1}^{n} g_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, au sens de $\|.\|_\infty$.

Soit $z \in K$. $|S(z) - \sum_{k=1}^{n} g_k(z)| \leq \|S - \sum_{k=1}^{n} g_k\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sum_{k=1}^{n} g_k(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(z)$, ce qui montre que $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$.

On a ainsi montré que $z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ est une application définie et surtout continue sur K. En particulier, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z) \underset{\substack{z\to z_0\\ z\in K}}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z_0)$.

Pour tout $z \in B_o(0, R)$, posons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Lorsque $z \in B_o(0, R) \setminus \{z_0\}$, $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$,

donc $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \underset{\substack{z\to z_0\\ z\in K\setminus\{z_0\}}}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z_0^n$.

De plus, $K = B_f(z_0, r)$ est un voisinage de z_0 et la notion de limite est une notion locale, donc $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \underset{\substack{z\to z_0\\ z\in B_o(0,R)\setminus\{z_0\}}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z_0^n$, ce qui conclut.

13°) $\diamond$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On note R le rayon de convergence de la série entière $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que $R > 0$. Pour tout $z \in B_o(0, R)$, on note $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, cette quantité étant bien définie car la série est absolument convergente.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons $R(p)$ l'assertion suivante : la série entière

$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=1}^{p} (n+k) \Big) a_{n+p} z^n$ admet R pour rayon de convergence, g est de classe D^p sur $B_o(0,R)$ et pour tout $z \in B_o(0,R)$, $g^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=1}^{p} (n+k) \Big) a_{n+p} z^n$.

Pour $p = 0$, $R(0)$ est évidente car le produit $\prod_{k=1}^{0} (n+k)$ est égal à 1 en tant que produit vide.

Pour $p \in \mathbb{N}$, supposons $R(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = \Big(\prod_{k=1}^{p} (n+k) \Big) a_{n+p}$.

D'après $R(p)$, R est le rayon de convergence de $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, donc d'après la question 11, R est aussi le rayon de convergence de $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} z^n$, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)b_{n+1} = (n+1)\Big(\prod_{k=1}^{p} (n+1+k) \Big) a_{n+p+1} = \Big(\prod_{k=1}^{p+1} (n+k) \Big) a_{n+p+1}$, donc la série entière $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=1}^{p+1} (n+k) \Big) a_{n+p+1} z^n$ a pour rayon de convergence R.

De plus, d'après la question précédente et d'après $R(p)$, $g^{(p)}$ est holomorphe sur $B_o(0,R)$ et pour tout $z \in B_o(0,R)$, $g^{(p+1)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=1}^{p+1} (n+k) \Big) a_{n+p+1} z^n$.

Ceci prouve $R(p+1)$.

D'après le principe de récurrence, et d'après la question 4, on a montré que g est de classe C^∞ sur $B_o(0,R)$.

$\diamond$ Soit maintenant Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une application développable en série entière sur Ω.

Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes tels que $B_o(z_0,r) \subset \Omega$, r est inférieur au rayon de convergence de la série entière $z \longmapsto \sum a_n z^n$ et tels que, pour tout $z \in B_o(z_0,r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Lorsque $z \in B_o(0,r)$, $z_0 + z \in B_o(z_0,r)$, donc on peut poser $g(z) = f(z+z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

D'après le point précédent, g est de classe C^∞ sur $B_o(0,r)$.

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe D^p sur $B_o(z_0,r)$ et que pour tout $z \in B_o(z_0,r)$, $f^{(p)}(z) = g^{(p)}(z-z_0)$.

La propriété est évidente pour $p = 0$ et si elle est vraie à l'ordre p, alors $f^{(p)}$ étant la composée de $g^{(p)}$ (qui est holomorphe sur l'ouvert $B_o(0,r)$) avec l'application $z \longmapsto z - z_0$ (qui est polynomiale donc holomorphe d'après la question 6), $f^{(p)}$ est

holomorphe sur $B_o(z_0,r)$ d'après la question 7, avec pour tout $z\in B_o(z_0,r)$, $f^{(p+1)}(z)=\frac{d(z-z_0)}{dz}g^{(p+1)}(z-z_0)=g^{(p+1)}(z-z_0)$.
Ceci prouve la propriété à l'ordre $p+1$.
Ainsi, la restriction de f à $B_o(z_0,r)$ est de classe C^∞ donc elle est en particulier dérivable à tout ordre en z_0. Or les notions de limite et de continuité sont locales, donc il en est de même de la notion d'application de classe C^k pour tout $k\in\mathbb{N}$. Ainsi, $B_o(z_0,r)$ étant un voisinage de z_0 inclus dans Ω, on a prouvé que f est dérivable à tout ordre en z_0, pour tout $z_0\in\Omega$, ce qui conclut.

Partie III : $C^1 \Longrightarrow C^\infty$.

14°) Soit $n\in\mathbb{Z}$. Par intégration par parties,
$2\pi c_n(g')=\displaystyle\int_0^{2\pi} g'(t)e^{-int}\,dt=[g(t)e^{-int}]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi} ing(t)e^{-int}\,dt$, or g est 2π-périodique, donc $g(0)=g(2\pi)e^{-2in\pi}$. Ainsi, $2\pi c_n(g')=2\pi inc_n(g)$, ce qu'il fallait démontrer.

15°) Soit $r\in]0,R[$. g_r est bien une application 2π-périodique.
f est de classe C^1 sur Ω et $t\longmapsto z_0+re^{it}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc g_r est la composée de deux applications de classe C^1, mais l'une est C^1 au sens du cours et l'autre au sens de la première partie. Il faut donc effectuer une démonstration, similaire à ce que l'on a fait en question 7.
Pour tout $t\in\mathbb{R}$, posons $h(t)=z_0+re^{it}$.
Soit $t_0\in\mathbb{R}$. h est dérivable en t_0, donc lorsque t tend vers 0,
$h(t_0+t)=h(t_0)+th'(t_0)+o(t)$.
Alors $g_r(t_0+t)=f(h(t_0+t))=f(h(t_0)+u)$, où $u=th'(t_0)+o(t)$. u tend vers 0 lorsque t tend vers 0, et f est dérivable en $h(t_0)$, donc d'après la question 4,
$$\begin{aligned}g_r(t_0+t)&=f(h(t_0))+uf'(h(t_0))+o(u)\\&=g_r(t_0)+th'(t_0)f'(h(t_0))+o(t)f'(h(t_0))+o(th'(t_0)+o(t)),\end{aligned}$$
donc de même qu'en question 7, on obtient que $g_r(t_0+t)=g_r(t_0)+th'(t_0)f'(h(t_0))+o(t)$, ce qui prouve que g_r est dérivable en t_0 avec $g_r'(t_0)=h'(t_0)f'(h(t_0))=ire^{it_0}f'(z_0+re^{it_0})$.
f est supposée C^1, donc f' est continue. Ainsi, par composition g_r' est une application continue sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que g_r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\boxed{g_r'(t)=ire^{it}f'(z_0+re^{it})}$.

16°) $\diamond$ Soit $n\in\mathbb{Z}$ et $r\in]0,R[$. D'après les questions 14 et 15,
$c_n(g_r')=inc_n(g_r)=ind_n(r)$ et $c_n(g_r')=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} ire^{it}f'(z_0+re^{it})e^{-int}\,dt$, donc d'après la formule de l'énoncé portant sur d_n', $ind_n(r)=ird_n'(r)$,
ce qui montre que $\boxed{d_n'(r)=\frac{n}{r}d_n(r)}$.
$\diamond$ Soit $n\in\mathbb{Z}$. d_n satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant, or $\int\frac{n}{r}\,dr=n\ln r+k$, donc d'après le cours, il existe $a_n\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $r\in]0,R[$, $d_n(r)=a_ne^{n\ln r}=a_nr^n$.

17°) Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n<0$. Soit $R'\in]0,R[$. Posons $K=B_f(0,R')$.

K est un compact inclus dans Ω. f est continue sur le compact K, donc d'après le cours, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $z \in K$, $|f(z)| \leq M$.
Soit $r \in]0, R']$. Par inégalité triangulaire, puis en tenant compte du fait que, $\forall t \in \mathbb{R},\ z_0 + re^{it} \in K$, $2\pi |d_n(r)| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\ dt \leq \int_0^{2\pi} M\ dt = 2\pi M$, donc $|a_n| \leq \dfrac{M}{r^n} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, car $n < 0$. Ceci prouve que $a_n = 0$.

18°) Soit $z \in B_o(z_0, R)$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $z - z_0 = re^{it}$.
$r = |z - z_0| \in [0, R[$.
Supposons d'abord que $r \neq 0$. Alors $r \in]0, R[$ et on peut utiliser ce qui précède.
g_r est de classe C^1 d'après la question 15, donc d'après le théorème de Dirichlet, $\sum_{k=-n}^{n} c_k(g_r)e^{ikt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_r(t) = f(z_0 + re^{it}) = f(z)$.
Or pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(g_r) = d_k(r) = r^k a_k$ avec $a_k = 0$ lorsque $k < 0$, donc $\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$.

Ceci prouve que la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge et que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.
Il reste à prouver cette égalité lorsque $r = 0$, c'est-à-dire que pour $z = z_0$, il reste à montrer que $f(z_0) = a_0$. Or, avec $r' \in]0, R[$,
$a_0 = a_0 r'^0 = d_0(r') = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r'e^{it})\ dt$. D'après l'énoncé, cette dernière quantité tend vers $f(z_0)$ lorsque r' tend vers 0, donc on a bien $a_0 = f(z_0)$.

19°) On suppose que $f\ :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application de classe C^1 sur un ouvert Ω.
Soit $z_0 \in \Omega$. Ω est un ouvert, donc il existe $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $B_o(z_0, R) \subset \Omega$.
D'après la question précédente, il existe une suite de complexes (a_n) telle que, pour tout $z \in B_o(z_0, R)$, la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.
Choisissons $r \in]0, R[$.

Il reste à montrer que r est inférieur au rayon de convergence de $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Il existe $r' \in]r, R[$. Posons $z = z_0 + r'$. $z \in B_o(z_0, R)$, donc la série $\sum a_n(z - z_0)^n = \sum a_n r'^n$ converge. On en déduit que $a_n r'^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
puis que $a_n r'^n = O(1)$. Alors $|a_n r^n| = |a_n r'^n| \Big(\dfrac{r}{r'}\Big)^n = O\Big(\Big(\dfrac{r}{r'}\Big)^n\Big)$, or $\dfrac{r}{r'} \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum \Big(\dfrac{r}{r'}\Big)^n$ converge, puis $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Ceci impose que r soit inférieur ou égal au rayon de convergence de $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

20°) D'après la question 13, f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$, donc elle sont a fortiori de classe C^1. Alors d'après la question 7, $g \circ f$ est holomorphe et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$. Or f' et g' sont continues, donc d'après les théorèmes usuels, $(g \circ f)'$ est continue. Ainsi $g \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$, donc d'après la question précédente, $g \circ f$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

En fait, on peut montrer que toute application holomorphe sur un ouvert Ω est de classe C^1, donc est développable en série entière sur Ω et est en particulier de classe C^∞ sur Ω.