Résumé de cours :
Semaine 26, du 7 au 11 avril.

Les fractions rationnelles

1 Corps des fractions d'un anneau intègre

Théorème. Soit A un anneau intègre. Il existe un corps K, unique à un isomorphisme près, tel que A est un sous-anneau de K, et tel que tout élément de K peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où $(a, b) \in A^2$ avec $b \neq 0$. a est appelé le numérateur et b le dénominateur de l'écriture $\frac{a}{b}$.
K est appelé le ***corps des fractions*** de A. C'est le plus petit corps contenant A.

2 Forme irréductible

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

Définition. On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés des fractions rationnelles en l'indéterminée X.

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
$\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F si et seulement si $F = \frac{P}{Q}$ et si $P \wedge Q = 1$.
$\frac{P}{Q}$ est un représentant unitaire de F si et seulement si $F = \frac{P}{Q}$ et si S est unitaire.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
F possède un unique représentant irréductible et unitaire. Si on le note $\frac{P}{Q}$, alors les représentants irréductibles de F sont les $\frac{\lambda P}{\lambda Q}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
et les représentants quelconques de F sont les $\frac{LP}{LQ}$ où $L \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
Il faut savoir le démontrer.

3 Degré

Définition. $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) \triangleq \deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Propriété. Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.
— $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$, avec égalité lorsque $\deg(F) \neq \deg(G)$.
Il faut savoir le démontrer.

— $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G))$.
— $\deg(FG^{-1}) = \deg(F) - \deg(G))$.

4 Racines et pôles

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant pour représentant **irréductible** $\frac{A}{B}$.
— Les racines de F sont les racines de A. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, a est une racine de F de multiplicité m si et seulement si a est racine de A de multiplicité m.
— Les pôles de F sont les racines de B. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, a est un pôle de F de multiplicité m si et seulement si a est racine de B de multiplicité m.

Définition. Si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}[X]$, on note $\overline{F} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$ est un isomorphisme de corps.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. α est racine (resp : pôle) de F de multiplicité m si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine (resp : pôle) de $\overline{F}$ de multiplicité m.

Corollaire. Si $F \in \mathbb{R}(X)$ et si α est racine de F (resp : racine de multiplicité m), alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de F (resp : racine de multiplicité m).

5 Fonctions rationnelles

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant pour représentant **irréductible** $\frac{A}{B}$. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses pôles.

La fonction rationnelle associée à F est l'application $\begin{array}{cccc} \tilde{F}: & \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} \end{array}$.

Propriété. Si deux fractions rationnelles coïncident pour une infinité de valeurs de $\mathbb{K}$, elles sont égales.
Il faut savoir le démontrer.

6 Composition

Définition. Si $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$, $P \circ F = P(F) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n F^n$.

Propriété. Pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$,
l'application $P \longmapsto P(F)$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Lemme : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$. Si $P \neq 0$ et si $F \notin \mathbb{K}$, alors $P \circ F \neq 0$.

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$.
Si $F = \frac{P}{Q}$, alors on pose $F \circ G = F(G) = \frac{P(G)}{Q(G)}$.

Propriété. Pour tout $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$, $F \longmapsto F(G)$ est un endomorphisme du corps $\mathbb{K}(X)$.

7 Dérivation

Définition. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose $F' \triangleq \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \in \mathbb{K}(X)$.

Définition. Par récurrence, on peut définir la dérivée n-ième formelle d'une fraction rationnelle.

Propriété. Pour tout $F \in \mathbb{R}(X)$ et $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{F^{(n)}} = \tilde{F}^{(n)}$.

Propriété. Pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(F') \leq \deg(F) - 1$,
avec égalité lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ et $\deg(F) \notin \{0, -\infty\}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.
— $(F+G)' = F' + G'$, et plus généralement, $(F+G)^{(n)} = F^{(n)} + G^{(n)}$.
— $(aF)' = aF'$, et plus généralement, $(aF)^{(n)} = aF^{(n)}$.
— $(FG)' = F'G + FG'$.
— Si $G \neq 0$, $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - G'F}{G^2}$.

Propriété. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{K}(X)$, $(F_1 \times \cdots \times F_n)' = \sum_{i=1}^{n} F_i' \prod_{j \neq i} F_j$.

Formule de Leibniz : $(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$.

Propriété. Pour tout $F, G \in \mathbb{K}(X)$, avec $G \notin \mathbb{K}$, $(F \circ G)' = G' \times (F' \circ G)$.

8 Décomposition en éléments simples.

8.1 Partie entière

Définition. Un élément simple de $\mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle de la forme $\frac{P}{Q^m}$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec Q irréductible et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Propriété de la partie entière : Soit $F = \frac{A}{S} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $F = E + \frac{B}{S}$ avec $\deg(B) < \deg(S)$. De plus, si $\frac{A}{S}$ est irréductible alors $\frac{B}{S}$ l'est également.
E est la *partie entière* de F.
Il faut savoir le démontrer.

8.2 Divisions successives

Méthode des divisions successives pour décomposer en éléments simples une fraction de la forme $\frac{B}{S^m}$ où S est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$:
A connaître.

8.3 Le théorème

Théorème de décomposition en éléments simples :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On peut toujours écrire F sous la forme $F = \dfrac{A}{{S_1}^{m_1}{S_2}^{m_2}\cdots{S_n}^{m_n}}$, où $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique famille $(T_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m_i}}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}\Big)$ avec pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;m_i]\!]$, $\deg(T_{i,j}) < \deg(S_i)$.
Cette égalité s'appelle la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{K}$.
Le polynôme E est la *partie entière* de F.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}$ s'appelle la partie polaire de F relative au polynôme S_i.

8.4 Dérivée logarithmique

Propriété. Soit P un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors, en notant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_n$ leurs multiplicités respectives, $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{X-\alpha_i}$.

Il faut savoir le démontrer.

8.5 Dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On peut toujours écrire F sous la forme $F = \dfrac{A}{(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des poles de F, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ sont leurs multiplicités
et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique famille $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m_i}}$ de complexes tels que $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}\Big)$.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ est la partie polaire de F relative au pôle α_i.

Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:
Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On peut toujours écrire F sous la forme

$$F = \frac{A}{\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{m_i}\Big) \times \Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X^2+b_iX+c_i)^{k_i}\Big)},$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des poles réels de F, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ sont leurs multiplicités, où pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ avec $b_i^2 - 4c_i < 0$ et où $A \in \mathbb{K}[X]$.
Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$ et trois uniques familles $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m_i}}$, $(f_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le k_i}}$ et $(g_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le k_i}}$ de réels tels que $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}\Big) + \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{f_{i,j}X+g_{i,j}}{(X^2+b_iX+c_i)^j}\Big)$.

Méthode : En pratique, pour décomposer une fraction rationnelle F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$,

1. on commence par l'écrire sous forme irréductible unitaire, $F = \frac{A}{B}$.
2. En effectuant la division euclidienne de A par B, on écrit $F = E + \frac{C}{B}$, où E est la partie entière de F. Lorsque $\deg(F) < 0$, il est évident que $E = 0$, donc on peut supprimer cette étape.
3. On scinde B en produit de polynômes irréductibles unitaires.
4. On écrit la DES de $\frac{C}{B}$ à l'aide de coefficients indéterminés.
5. On calcule ces coefficients indéterminés.

8.6 Quelques techniques de DES

Remarque. La technique des divisions euclidiennes successives est adaptée à la DES de fractions de la forme $\frac{P}{Q^m}$, où Q est irréductible.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Alors le coefficient λ de l'élément simple $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = [(X \widetilde{- \alpha})^m F](\alpha)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant un pôle simple α.
Si $\frac{A}{S}$ est un représentant irréductible de F, alors le coefficient λ de l'élément simple $\frac{1}{X-\alpha}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{S}'(\alpha)}$.

Il faut savoir le démontrer.

Généralisation : (hors programme) On suppose que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ dont $a \in \mathbb{K}$ est l'un des pôles,de multiplicité m. Si $\frac{A}{S}$ est un représentant irréductible de F, alors le coefficient λ de l'élément simple $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = \frac{m!\tilde{A}(\alpha)}{\widetilde{S^{(m)}}(\alpha)}$.

Utilisation d'un développement limité : Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et a un pôle de F de multiplicité m. On peut écrire la DES de F sous la forme $F(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{(X-a)^i} + G(X)$. La fonction rationnelle associée à G est continue en a, donc au voisinage de a, $(t-a)^m F(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t-a)^{m-i} + O((t-a)^m)$.
On peut donc calculer les λ_i en effectuant un développement limité de $(t-a)^m F(t)$ au voisinage de a puis en invoquant l'unicité du développement limité.

9 Application des fractions rationnelles au calcul intégral

9.1 Primitives d'une fraction rationnelle

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, pour calculer $\displaystyle\int F(t)dt$, on décompose F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

On est ainsi ramené au problème du calcul des primitives des éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:

Lorsque $F(X) = \dfrac{aX+b}{(X^2+cX+d)^\alpha}$, avec $\Delta = c^2 - 4d < 0$, À connaître :

on décompose le calcul de $\displaystyle\int F(t)dt$ en celui de $\displaystyle\int \frac{u'(t)}{u(t)^\alpha}\,dt$, où $u(t) = t^2 + ct + d$, et celui de $\displaystyle\int \frac{dt}{u(t)^\alpha}$.

Pour ce dernier, on écrit $X^2 + cX + d = (X + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{c^2}{4} = (X-p)^2 + q^2$

et on se ramène au calcul de $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$, que l'on réalise en posant $t = \tan u$.

9.2 Fonctions rationnelles de sin et cos : hors programme

Pour calculer $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$, où $R \in \mathbb{R}(X, Y)$:

Cas particulier. $\int \sin^p t \cos^q t\, dt$, avec p et q pairs. C'est le seul cas où on linéarise.

Cas général. On pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$ pour se ramener à une primitive de fraction rationnelle.

Les règles de Bioche. Notons $f : t \longmapsto R(\sin t, \cos t)$.

Si $f(-t)d(-t) = f(t)dt$, on posera $x = \cos t$ (On a $\cos(-t) = \cos t$) ,
Si $f(\pi - t)d(\pi - t) = f(t)dt$, on posera $x = \sin t$ (On a $\sin(\pi - t) = \sin t$) ,
Si $f(\pi + t)d(\pi + t) = f(t)dt$, on posera $x = \tan t$ (On a $\tan(\pi + t) = \tan t$).
Si deux des trois relations précédentes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi. On pose alors $x = \sin^2 t$ ou $x = \cos(2t)$.

9.3 Fonctions rationnelles en sh et ch : hors programme

Pour calculer $\int R(\text{sh}t, \text{ch}t)\, dt$, où $R \in \mathbb{R}(X, Y)$, on regarde quel procédé serait utilisé pour le calcul de $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$ et on le transpose en trigonométrie hyperbolique.
Dans le cas général, on peut poser $x = e^t$.

Les matrices

10 Vocabulaire

Définition. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On appelle ***matrice*** à n lignes et à p colonnes (à coefficients dans $\mathbb{K}$) toute famille de scalaires indexée par $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$.
Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p} = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$, on représente M sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix},$$

où le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Notation. L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, n)$ est souvent noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définitions :
- Une ***matrice ligne*** est une matrice ne possédant qu'une ligne.
- Une ***matrice colonne*** est une matrice ne possédant qu'une colonne.
- Une ***matrice carrée*** est une matrice possédant autant de lignes que de colonnes.
- $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est une ***matrice triangulaire supérieure*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \ \big(i > j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$.
- M est une ***matrice triangulaire inférieure*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \ \big(i < j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$.
- $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est une ***matrice diagonale*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \quad \big(i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$. On note alors $M = diag(m_{1,1}, \ldots, m_{n,n})$.
- Une matrice carrée et diagonale est dite ***scalaire*** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont égaux. En particulier, lorsque tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, on obtient la matrice identité, notée I_n.

Remarque. On identifiera $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,1)$ (ensemble des matrices colonnes).

11 Opérations sur les matrices

Définition. On sait dèjà que $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On dispose ainsi des lois d'addition et de multiplication par un scalaire.

Propriété. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille de matrices $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ définie par : Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, $E_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{\substack{1 \le a \le n \\ 1 \le b \le p}}$.
$E_{i,j}$ est appelée la (i,j)-ième matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Tous ses coefficients sont nuls, sauf celui de position (i,j) qui est égal à 1.
Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} M_{i,j} E_{i,j}$.
On en déduit que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Convention : Lorsque A est une matrice, on notera $A_{i,j}$ son coefficient de position (i,j).

Définition du produit matriciel : Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{p})$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p},q)$.
On appelle ***produit des matrices*** A et B la matrice $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,q)$ définie par

$$\boxed{[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}}.$$

Formule pour le produit de trois matrices : Soit $(n,m,l,p) \in (\mathbb{N}^*)^4$.
Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{m})$, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{m},\mathbf{l})$ et $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{l},p)$: $[(AB)C]_{i,h} = [A(BC)]_{i,h} = \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le l}} A_{i,j} B_{j,k} C_{k,h}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La multiplication matricielle est associative.

Propriété. La mutiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Propriété. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $I_n M = M I_p = M$.

Propriété. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$. Pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $MX \in \mathbb{K}^n$.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $[MX]_i = \sum_{j=1}^{p} M_{i,j}x_j$
et $MX = x_1M_1 + \cdots x_pM_p$, en notant $M_1, \dots, M_p$ les colonnes de M.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, la j-ème colonne de M est Mc_j, où $c_j = (\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^p$.

Définition. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $\begin{array}{rccc} \tilde{M}: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$ est une application linéaire que l'on appelle **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** M.

Propriété. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On identifie souvent M et $\tilde{M}$, auquel cas, pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $MX = M(X)$.
Cela permet d'interpréter une matrice M comme une application linéaire.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$: $\text{Ker}(M) \stackrel{\Delta}{=} \{X \in \mathbb{K}^p \ / \ MX = 0\}$

et $\text{Im}(M) \stackrel{\Delta}{=} \{MX \ / \ X \in \mathbb{K}^p\} = \text{Vect}\{\text{colonnes de } M\}$.

Corollaire. Soit $(M, M') \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$: $\big(\forall X \in \mathbb{K}^p \quad MX = M'X\big) \Longleftrightarrow M = M'$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,q)$. Alors $\widetilde{AB} = \tilde{A} \circ \tilde{B}$.