

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 24 : du lundi 28 avril au vendredi 2 mai.

Les polynômes

Liste des questions de cours

- 1°) Énoncer et démontrer une propriété portant sur le degré de la composée de deux polynômes.
- 2°) Énoncer et démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne entre polynômes.
- 3°) Montrer que a est racine de P si et seulement si $(X - a) \mid P$.
- 4°) Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.
- 5°) Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si il ne possède aucune racine dans \mathbb{K} .
- 6°) Dans $\mathbb{K}[X]$, énoncer et démontrer le théorème d'existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes d'irréductibles.
- 7°) Écrire (en justifiant) tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ en fonction des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de $n + 1$ scalaires deux à deux distincts.
- 8°) Énoncer et démontrer la formule de Taylor.
- 9°) Énoncer et démontrer une propriété qui fait le lien entre multiplicité de a pour P et dérivées successives de P en a .
- 10°) Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$, dont les racines, comptées avec multiplicité sont notées x_1, x_2 et x_3 . Calculer $S = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \frac{1}{x_3 + 1}$ en fonction de a, b, c .
- 11°) Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que α est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\bar{\alpha}$ est racine de \bar{P} de multiplicité m .

Les polynômes

1 L'anneau des polynômes

Notation. A désigne un anneau quelconque.

Polynômes formels de $A[X]$. Addition entre polynômes. $(A[X], +)$ est un groupe.

Degré d'un polynôme. $A[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n[X]$.

Degré d'une somme de polynômes.

Produits de polynômes. $(A[X], +, \times)$ est un anneau contenant A .

$A[X]$ est commutatif intègre si et seulement si A est commutatif intègre.

Pour toute la suite, on suppose que A est commutatif intègre.

Degré d'un produit de polynômes.

Ensemble des polynômes inversibles.

Application polynomiale $\tilde{P} \in A^A$ associée à un polynôme formel $P \in A[X]$.

$P \mapsto \tilde{P}$ est un morphisme d'anneaux.

Algorithme d'Hörner.

Définition de $A[X_1, \dots, X_n]$: aucune connaissance n'est exigible sur les polynômes à plusieurs indéterminées.

Composition de polynômes.

Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Dérivation formelle. Dérivée d'ordre n .

$\deg(P') \leq \deg(P) - 1$: **Le cas d'égalité est précisé plus loin.**

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, formule de Leibniz, dérivée d'une composée.

Pour la suite, \mathbb{K} désigne un corps.

Division euclidienne.

Reste de la division de P par $X - a$. a est racine de P si et seulement si $(X - a) \mid P$.

Si \mathbb{L} est un sous-corps de \mathbb{K} , les quotient et reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{L}[X]$ par $B \in \mathbb{L}[X] \setminus \{0\}$ sont les mêmes que l'on regarde A et B comme des polynômes de $\mathbb{L}[X]$ ou de $\mathbb{K}[X]$.

2 Arithmétique

2.1 Divisibilité dans un anneau commutatif A

$a \mid b \iff bA \subseteq aA$.

La relation de divisibilité est réflexive et transitive.

Éléments de A associés.

Hypothèse : on suppose que A est un anneau intègre.

Soit $a, b \in A$. a et b sont associés si et seulement s'il existe $\lambda \in U(A)$ tel que $a = \lambda b$.

La relation de divisibilité est un ordre sur \mathbb{N} et sur l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Éléments irréductibles de A .

Éléments de A premiers entre eux, deux à deux ou globalement.

Si $p \in A$ est irréductible, pour tout $a \in A$, $p \mid a$, ou bien p et a sont premiers entre eux.

2.2 PGCD et PPCM

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

Notation. Dans ce chapitre, A désigne un anneau principal.

PGCD et PPCM de deux éléments : définition par idéaux, caractérisation par divisibilité.

PGCD et PPCM de k éléments, d'une partie quelconque de A .

Commutativité et associativité des PGCD et PPCM, distributivité du produit par rapport au PGCD et au PPCM.

2.3 Bezout et Gauss

Identité de Bezout, théorème de Gauss.

Si $p \mid ab$ avec p irréductible, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Si $a \wedge b = a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$.

Si $a \mid b$, $c \mid b$ et $a \wedge c = 1$ alors $ac \mid b$.

ab et $(a \wedge b)(a \vee b)$ sont associés.

2.4 \mathbb{Z} et $\mathbb{K}[X]$ sont factoriels

Notation. Ici, $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{K}[X]$. Si $A = \mathbb{Z}$, \mathcal{P} désigne \mathbb{P} , et si $A = \mathbb{K}[X]$, \mathcal{P} est l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires.

Existence et unicité de la décomposition en produit d'irréductibles.

Si $a = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p}$ et $b = v \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\mu_p}$, alors $a \mid b \iff [\forall p \in \mathcal{P}, \nu_p \leq \mu_p]$,

$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(\nu_p, \mu_p)}$ et $a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(\nu_p, \mu_p)}$.

2.5 Algorithme d'Euclide

Lemme d'Euclide : si $a = bq + r$, alors $a \wedge b = b \wedge r$.

Algorithme d'Euclide. Utilisation de l'algorithme d'Euclide pour calculer des coefficients de Bezout de deux polynômes (ou de deux entiers) premiers entre eux.

En exercice : pour $a, b \in A$, solutions de l'équation de Bézout (B) : $au + bv = c$ en l'inconnue $(u, v) \in A^2$.

Si \mathbb{L} est un sous-corps de \mathbb{K} et $(A, B) \in \mathbb{L}[X] \times (\mathbb{L}[X] \setminus \{0\})$, les PGCD et PPCM de A et B sont les mêmes, que l'on regarde A et B comme des polynômes de $\mathbb{L}[X]$ ou de $\mathbb{K}[X]$.

3 Racines d'un polynôme

3.1 Identification entre polynômes formels et applications polynomiales

a_1, \dots, a_k sont racines de P si et seulement si P est un multiple de $(X - a_1) \times \dots \times (X - a_k)$.

Un polynôme non nul admet au plus $\deg(P)$ racines.

Principe de rigidité des polynômes : si $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines, alors $P = 0$.

Lorsque $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, si $\{x \in \mathbb{K} \mid \tilde{P}(x) = \tilde{Q}(x)\}$ contient au moins $n + 1$ scalaires, alors $P = Q$.

Identification entre polynômes formels et applications polynomiales de \mathbb{K} dans \mathbb{K} lorsque \mathbb{K} est infini.

Polynômes d'interpolation de Lagrange.

3.2 Polynôme dérivé, lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$

$\deg(P) \geq 1 \implies \deg(P') = \deg(P) - 1$.

Formule de Taylor. Reste de la division euclidienne par $(X - a)^k$.

3.3 Racines multiples

Racine de multiplicité au moins m de P ou exactement m de P .

Les a_h sont racines de P de multiplicité au moins m_h si et seulement si $\prod_{h=1}^k (X - a_h)^{m_h}$ divise P .

Le nombre de racines de P (non nul), comptées avec multiplicité est inférieur ou égal au degré de P .

Lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$, lien entre multiplicité de a et dérivées successives en a .

3.4 Polynômes scindés

Polynômes scindés, simplement scindés.

Relations de Viète entre coefficients et racines.

3.5 Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$

$\mathbb{C}[X] \xrightarrow{\quad} \mathbb{C}[X]$
 $P \mapsto \bar{P}$ est un isomorphisme d'anneaux.

α est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\bar{\alpha}$ est racine de \bar{P} de multiplicité m .

Théorème de d'Alembert.

Dans $\mathbb{C}[X]$, le nombre de racines avec multiplicité, de tout polynôme non nul est égal à son degré.

$P \mid Q$ si et seulement si toute racine de P est racine de Q avec une multiplicité pour Q supérieure ou égale à celle pour P .

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Fractions rationnelles.