DM 50 : un corrigé

Partie I : polynômes d'endomorphismes

1°) Si $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les applications $f+g$, fg et αf en convenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x).g(x)$ et $(\alpha f)(x) = \alpha.f(x)$.

2°)

$\diamond$ L'élément neutre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour la multiplication est la fonction constante égale à 1. C'est clairement un polynôme, dont les coefficients sont $(a_n) = (\delta_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, en notant $\mathbf{1}$ cet élément neutre, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}[X]$.

$\diamond$ Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $P(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha P)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha a_n x^n$, donc $\alpha P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha a_n X^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P+Q)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$, et $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle,

car $\{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n + b_n \neq 0\} \subset \{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n \neq 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \ / \ b_n \neq 0\}$

donc $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ et $P + Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n$.

On peut ainsi déjà affirmer que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (il est bien non vide).

$\diamond$ Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $a_n = b_n = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(PQ)(x) = \Big(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N} b_n x^n\Big) = \sum_{0\leq n,m\leq N} a_n b_m x^{n+m}$, donc PQ est une combinaison linéaire de polynômes, or $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc $PQ \in \mathbb{R}[X]$.

En conclusion, on a bien montré que $\mathbb{R}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3°)

$\diamond$ Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$P + \lambda Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k + \lambda b_k) X^k$, donc par définition de φ,

$\varphi(P + \lambda Q) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k + \lambda b_k) u^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k u^k + \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k u^k = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$

Ceci prouve que φ est une application linéaire.

$\diamond$ Soit $Q(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k$ et soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(X^p\right) \circ \varphi(Q) &= u^p \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k u^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k u^{k+p} \\
&= \sum_{k\geqslant p} b_{k-p} u^k = \varphi\left(\sum_{k\geqslant p} b_{k-p} X^k\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^{k+p}\right) = \varphi\left(X^p Q\right).
\end{aligned}$$

$\diamond$ $\mathbb{R}[X]$ est une algèbre d'après la question 2 et $L(E)$ est une algèbre d'"après le cours. Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_p X^p$ et $Q(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

$PQ = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p X^p Q$ et cette somme est finie, or φ est linéaire,

donc $\varphi(PQ) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p \varphi(X^p Q) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p u^p Q(u)$ d'après le point précédent. Ainsi, en calculant dans l'algèbre $L(E)$, $\varphi(PQ) = \Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p u^p\Big) Q(u) = P(u)Q(u) = \varphi(P)\varphi(Q)$.

De plus on a vu que φ est linéaire et $\varphi(1) = \varphi(X^0) = u^0 = \mathrm{Id}$, donc φ est bien un morphisme d'algèbres.

4°)

$\diamond$ Soit P, Q, R sont trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que P et Q sont premiers avec R. Par définition, il existe $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BR = 1 = CQ + DR$. En effectuant le produit dans l'algèbre $\mathbb{R}[X]$, on obtient que

$$\begin{aligned}
1 &= (AP + BR)(CQ + DR) \\
&= (AC)(PQ) + (APD + BCQ + BDR)R \\
&= A'(PQ) + B'R,
\end{aligned}$$

en posant $A' = AC$ et $B' = APD + BCQ + BDR$, donc PQ est premier avec R.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : si $P_1, \ldots, P_n$ sont n polynômes, tous premiers avec un même polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $\prod_{i=1}^{n} P_i$ est premier avec Q.

$R(1)$ est évidente et $R(2)$ résulte du point précédent.

Supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit $P_1, \ldots, P_{n+1}$ $n+1$ polynômes, tous premiers avec un même polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. D'après $R(n)$, $\prod_{i=1}^{n} P_i$ est premier avec Q. De plus P_{n+1} est aussi premier avec Q, donc d'après $R(2)$, $\prod_{i=1}^{n+1} P_i = P_{n+1} \prod_{i=1}^{n} P_i$ est premier avec Q, ce qui prouve $R(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

Partie II : décomposition des noyaux

5°) a) Soit $f \in F$, $g \in G$ et $h \in H$ tels que $f + g + h = 0$.
Posons $k = f + g$. $k \in K$ et $k + h = 0$ avec $h \in H$.
La somme $K + H$ est directe, donc $k = h = 0$.
Ainsi, $0 = k = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. La somme $F + G$ est directe, donc $f = g = 0$.
Ainsi $f = g = k = 0$, ce qui prouve que la somme $F + G + H$ est directe. De plus,

$$\begin{aligned}(F \oplus G) \oplus H &= \{(f + g) + h \ / \ f \in F, g \in G, h \in H\} \\ &= \{f + g + h \ / \ f \in F, g \in G, h \in H\} = F \oplus G \oplus H.\end{aligned}$$

b) Il suffit d'adapter le raisonnement précédent : on suppose que $f_1 + \cdots + f_n + g = 0$, où $g \in G$ et où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_i \in F_i$. Posons $k = f_1 + \cdots + f_n$. $k \in K$ et $k + g = 0$, or $K + G$ est directe, donc $k = g = 0$. Ainsi, $f_1 + \cdots + f_n = 0$, or $F_1 + \cdots + F_n$ est directe, donc $g = f_1 = \cdots = f_n = 0$, ce qui prouve que $F_1 + \cdots + F_n + G$ est une somme directe. De plus,

$$\begin{aligned}(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) \oplus H &= \{(f_1 + \cdots + f_n) + h \ / \ g \in G, \ \ \forall i \in \mathbb{N}_n, f_i \in F_i\} \\ &= \{f_1 + \cdots + f_n + h \ / \ g \in G, \ \ \forall i \in \mathbb{N}_n, f_i \in F_i\} \\ &= F_1 \oplus \cdots \oplus F_n \oplus H.\end{aligned}$$

6°) Pour tout $v, w \in L(E)$, $\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(vw)$, car si $x \in E$ vérifie $w(x) = 0$, alors $(vw)(x) = v(w(x)) = v(0) = 0$.
En particulier, avec $v = P(u)$ et $w = Q(u)$,
$\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}((P(u) \circ Q(u)) = \mathrm{Ker}((PQ)(u))$,
de plus, $(PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$, donc on a aussi $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.
$\mathrm{Ker}((PQ)(u))$ est donc un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathrm{Ker}(P(u)) \cup \mathrm{Ker}(Q(u))$, donc il contient $\mathrm{Vect}(\mathrm{Ker}(P(u)) \cup \mathrm{Ker}(Q(u))) = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) D'après l'énoncé, il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$,
donc $\mathrm{Id} = \varphi(1) = \varphi(A)\varphi(P) + \varphi(B)\varphi(Q) = A(u)P(u) + B(u)Q(u)$.
On en déduit que, pour tout $x \in E$, $x = (AP)(u)(x) + (BQ)(u)(x)$.
$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u))$.
Alors $x = A(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) = 0$, car $P(u)(x) = Q(u)(x) = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u)) = \{0\}$, ce qui prouve que la somme est directe.
$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$. $x = [(AP)(u)](x) + [(BQ)(u)](x)$, or
$Q(u)([(AP)(u)](x)) = (QAP)(u)(x) = A(u)([(PQ)(u)](x)) = 0$ et
$P(u)([(BQ)(u)](x)) = B(u)([(PQ)(u)](x)) = 0$, donc
$[(AP)(u)](x) \in \mathrm{Ker}(Q(u))$ et $[(BQ)(u)](x) \in \mathrm{Ker}(P(u))$.
Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.
On a prouvé que $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$. L'inclusion réciproque a été démontrée en question 6, donc $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

8°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : si $P_1, \ldots, P_n$ sont n polynômes de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_i(u)) = \mathrm{Ker}\Big(\Big[\prod_{i=1}^{p} P_i\Big](u)\Big)$.

La question précédente prouve $R(2)$.
Supposons que $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit $P_1, \ldots, P_{n+1}$ $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Posons $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ et $Q = P_{n+1}$. D'après la question 4, P est premier avec Q, donc d'après $R(2)$, en posant $K = \mathrm{Ker}(P(u))$ et $G = \mathrm{Ker}(Q(u))$, $K \oplus G = \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.
De plus, d'après $R(n)$, en posant $F_i = \mathrm{Ker}(P_i(u))$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $F_1 + \cdots + F_n$ est une somme directe et $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathrm{Ker}(P(u))$. Alors d'après la question 5.b, $F_1 + \cdots + F_n + G$ est une somme directe et $(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) \oplus G = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n \oplus G$.
On a donc montré que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(P_{n+1}(u)) &= \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Ker}((PQ)(u)) \\ &= \mathrm{Ker}\Big(\Big[\prod_{i=1}^{n+1} P_i\Big](u)\Big). \end{aligned}$$

9°)

◇ Soit $(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p_i}}$ une famille de réels telle que $\sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p_i}} \alpha_{i,j} e_{i,j} = 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, posons $x_i = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x_i \in F_i$ et $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$.
La somme étant supposée directe, on en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x_i = 0$.
Soit $i \in \mathbb{N}_p$. On a donc $0 = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$, or b_i est une famille libre, donc pour tout $j \in \mathbb{N}_{p_i}$, $\alpha_{i,j} = 0$. Ceci prouve que b est une famille libre de vecteurs.

◇ Soit $x \in F$. $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, il existe $x_i \in F_i$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, b_i est une base de F_i et $x_i \in F_i$, donc il existe $(\alpha_{i,j})_{1 \le j \le p_i} \in \mathbb{R}^{p_i}$ telle que $x_i = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$. On en déduit que $x = \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p_i}} \alpha_{i,j} e_{i,j}$, donc b est une famille génératrice de E.

◇ En conclusion, b est une base de E. En passant aux cardinaux, on en déduit que $\dim(F) = |b| = \sum_{i=1}^{p} |b_i| = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Partie III : applications

10°) a) Soit y une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de (E). Alors y est nécessairement trois fois dérivable.
On montre par récurrence sur n que y est de classe C^n : en effet, $y''' = 2y'' + y' - 2y$ est dérivable donc continue, donc y est de classe C^3, et si y est C^n pour $n \ge 3$,

$y''' = 2y'' + y' - 2y$ est C^{n-2} donc y est C^{n+1}.
Ainsi toute solution de (E) est un vecteur de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Notons D l'application de E dans E définie par : pour tout $f \in E$, $D(f) = f'$. Clairement $D \in L(E)$ et pour tout $y \in E$, $(E) \iff D^3(y) = 2D^2(y) + D(y) - 2y$, donc en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E),
$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(D^3 - 2D^2 - D + 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(P(D))$, où $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

c) On a $P(X) = (X-1)(X^2 - X - 2) = (X-1)(X+1)(X-2) = P_1P_2P_3$, où $P_1 = X - 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X - 2$.
Lorsque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq \beta$, les polynômes $X - \alpha$ et $X - \beta$ sont premiers entre eux car $\dfrac{P - Q}{\beta - \alpha} = 1$. Ainsi les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont deux à deux premiers entre eux.
Alors, d'après la question 8, $\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(D - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(D + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(D - 2\mathrm{Id})$.
De plus $y \in \mathrm{Ker}(D - \mathrm{Id}) \iff y' = y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \ y = \lambda e^t$, donc $\mathrm{Ker}(D - \mathrm{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = (t \longmapsto e^t)$.
De même $\mathrm{Ker}(D + \mathrm{Id}) = Vect(e_2)$ et $\mathrm{Ker}(D - 2\mathrm{Id}) = Vect(e_3)$ où $e_2 = (t \longmapsto e^{-t})$ et $e_3 = (t \longmapsto e^{2t})$.
Alors d'après la question précédente, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{S}$, donc l'ensemble des solutions de (E) est exactement l'ensemble des applications de la forme
$t \longmapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{2t}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

11°) On choisit maintenant $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et D désigne l'application de E dans E définie par : $D((v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(D^3 - 2D^2 - D + 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(P(D))$, où $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$.
Comme lors de la question précédente, $\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(D - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(D + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(D - 2\mathrm{Id})$.
De plus,
$(v_n) \in \mathrm{Ker}(D - 2\mathrm{Id}) \iff [\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = 2v_n] \iff [\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \alpha 2^n]$, donc $\mathrm{Ker}(D - 2\mathrm{Id})$ est la droite vectorielle de E engendrée par la suite géométrique $e_2 = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme lors de la question précédente, on en déduit que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites de la forme $(\alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Partie IV : Une décomposition plus fine

12°)

$\diamond$ Notons $v' = v|_S \ :\ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array}$.

Soit $x \in S$. Si $x \in \mathrm{Ker}(v')$, alors $v(x) = 0$, donc $x \in S \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(v') = \{0\}$ et v' est injective.
Soit $y \in E$. v étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $v(x) = y$. De plus, $S \oplus \mathrm{Ker}(v) = E$, donc il existe $(s, k) \in S \times \mathrm{Ker}(v)$ tel que $x = s + k$. Ainsi $v(x) = v(s) + v(k) = v'(s)$ donc $y = v'(s)$. Cela prouve la surjectivité de v'.

$\diamond$ On peut alors définir l'application w de E dans E en convenant que, pour tout $x \in E$, $w(x) = (v|_S)^{-1}(x)$. D'après le cours, $v|_S$ est linéaire, donc pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $w(\alpha x + y) = \alpha w(x) + w(y)$. Ainsi, $w \in L(E)$.
Soit $x \in E$. $vw(x) = v((v|_S)^{-1}(x))$, or $(v|_S)^{-1}(x) \in S$,
donc $vw(x) = v|_S((v|_S)^{-1}(x)) = x$. Ceci prouve que $vw = \mathrm{Id}$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(w)$. Alors $x = \mathrm{Id}(x) = v(w(x)) = v(0) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(w) = \{0\}$, ce qui prouve que w est injectif.

13°)
$\diamond$ Soit $i \in \mathbb{N}$. Notons $R(i)$ l'assertion suivante : $v^i w^i = \mathrm{Id}$.
Pour $i = 0$, $v^0 = w^0 = \mathrm{Id}$, d'où $R(0)$.
Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons $R(i)$.
$v^{i+1}w^{i+1} = v(v^i w^i)w$, donc d'après $R(i)$, $v^{i+1}w^{i+1} = vw = \mathrm{Id}$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall i \in \mathbb{N},\ \ v^i w^i = \mathrm{Id}$.
$\diamond$ Soient $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ et $x \in w^i(\mathrm{Ker}(v))$: Il existe $y \in \mathrm{Ker}(v)$ tel que $x = w^i(y)$. Alors $v^k(x) = v^k(w^i(y)) = v^{k-i}v^i w^i(y) = v^{k-i}(y)$ car $v^i w^i = \mathrm{Id}$, or $k - i - 1 \geq 0$, donc $v^k(x) = v^{k-i-1}(v(y))$, de plus $v(y) = 0$, donc $v^k(x) = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(v^k)$, ce qui prouve que $w^i(\mathrm{Ker}(v)) \subset \mathrm{Ker}(v^k)$.

14°)
$\diamond$ Soit $x \in E$ et soit $i \in \{0, \ldots, k-1\}$:
$w^i v^i(x) - w^{i+1}v^{i+1}(x) = w^i\left(v^i(x) - wv^{i+1}(x)\right)$
et $v\left(v^i(x) - wv^{i+1}(x)\right) = 0$, car $vw = \mathrm{Id}$. Ainsi
$w^i v^i(x) - w^{i+1}v^{i+1}(x) \in w^i(\mathrm{Ker}(v))$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(v^k)$: $x = x - w^k v^k(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \left[w^i v^i(x) - w^{i+1}v^{i+1}(x)\right]$,

donc $\mathrm{Ker}(v^k) \subset \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} w^i(\mathrm{Ker}(v))$.
De plus d'après la question précédente, l'inclusion réciproque est vraie.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(v^k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} w^i(\mathrm{Ker}(v))$.
Il reste à montrer que cette somme est directe.
$\diamond$ Soit $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant k-1}$ une famille de vecteurs de E verifiant :

$\forall i \in \{0, \ldots, k-1\},\ \ y_i \in w^i\left(\mathrm{Ker}(v)\right)$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} y_i = 0$.

Pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, il existe $x_i \in \mathrm{Ker}(v)$ tel que $y_i = w^i\left(x_i\right)$.
Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} w^i\left(x_i\right) = 0$.
Supposons qu'il existe $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tel que $w^i\left(x_i\right) \neq 0$.

Alors, $\{i \in \{0, \ldots, k-1\} \ / \ w^i(x_i) \neq 0\}$ est un ensemble fini et non vide inclus dans $\mathbb{N}$, donc il admet un maximum noté i_0. Alors $\sum_{i=0}^{i_0} w^i(x_i) = 0$.

Ainsi $0 = v^{i_0}\left(\sum_{i=0}^{i_0} w^i(x_i)\right) = v^{i_0}w^{i_0}(x_{i_0})$, car, d'après b), pour tout $i \in \{0, \ldots, i_0 - 1\}$, $w^i(\mathrm{Ker}(v)) \subset \mathrm{Ker}(v^{i_0})$. De plus, $v^{i_0}w^{i_0} = \mathrm{Id}$ donc $x_{i_0} = 0$, ce qui est imposible.
Ainsi $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $y_i = w^i(x_i) = 0$.

En conclusion, on a montré que $\mathrm{Ker}(v^k) = \bigoplus_{i=0}^{k-1} w^i(\mathrm{Ker}(v))$.

15°) Par composition d'endomorphismes injectif, pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, w^i est un endomorphisme injectif, donc $w^i(\mathrm{Ker}(v))$ est de dimension finie égale à s. Alors, d'après la question 14, $\dim(\mathrm{Ker}(v^k)) = ks$.

16°) Pour tout $q \in \mathbb{N}_p$, posons $P_q = (X - r_q)^{n_q}$.
Soit $q, m \in \mathbb{N}_p$ avec $q \neq m$. Alors d'après l'énoncé, $r_q \neq r_m$. On a vu en question 10.b qu'alors $X - r_q$ et $X - r_m$ sont premiers entre eux. D'après la question 4, on en déduit que $(X - r_q)^{n_q}$ est premier avec $X - r_m$, puis que $P_m = (X - r_m)^{n_m}$ est premier avec $P_q = (X - r_q)^{n_q}$.
Ainsi les polynômes $P_1, \ldots, P_p$ sont deux à premiers entre eux, donc d'après la question 8, $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{q=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_q(u))$.
De plus, pour tout $q \in \mathbb{N}_p$, $\mathrm{Ker}(P_q(u)) = \mathrm{Ker}(v_q^{n_q})$, où $v_q = u - r_q\mathrm{Id}$, donc d'après la question 14, $\mathrm{Ker}(P_q(u)) = \bigoplus_{k=0}^{n_q-1} w_q^k(\mathrm{Ker}(u - r_q\mathrm{Id}))$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{q=1}^{p}\Big(\bigoplus_{k=0}^{n_q-1} w_q^k(\mathrm{Ker}(u - r_q\mathrm{Id}))\Big)$.
Ensuite, d'après les questions 9 et 15, lorsque $\mathrm{Ker}(u - r_q\mathrm{Id})$ est de dimension finie s_q pour tout $q \in \{1, \ldots, p\}$, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(P(u))) = \sum_{q=1}^{p} n_q s_q$.