

## Feuille d'exercices 22.

### Matrices

**Exercice 22.1** : (niveau 1)

On pose  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . On note  $U = 1$ ,  $V = 1 - X$  et  $W = (1 - X)^2$ .

1°) Montrer que  $(U, V, W)$  est une base de  $E$ .

2°) On pose 
$$\begin{aligned} v: E &\longrightarrow \mathbb{R} & d: E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P(2), & P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

et 
$$f: E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P(X+1) - P(X-1).$$

Montrer que  $v$ ,  $d$  et  $f$  sont des applications linéaires et donner leur matrice dans la base  $(U, V, W)$ .

**Exercice 22.2** : (niveau 1)

1°) Soit  $M, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $P$  est inversible. On pose  $D = P^{-1}MP$ . Montrer que, pour tout  $k \geq 0$ ,  $M^k = PD^kP^{-1}$ .

2°) On pose  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $P^{-1}$  et calculer  $D = P^{-1}MP$ .

Pour tout  $k \geq 0$ , calculer  $D^k$  puis  $M^k$ .

**Exercice 22.3** : (niveau 1)

Calculez le rang de 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix},$$
 où  $a, b, c$  et  $d$  sont 4 réels quelconques.

**Exercice 22.4** : (niveau 1)

1°) Soit  $D$  une matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer les matrices de  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$  qui commutent avec  $D$ .

2°) Déterminer les matrices de  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$  qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

**Exercice 22.5** : (niveau 1)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $L(E)$ . Montrer que  $|rg(a) - rg(b)| \leq rg(a+b) \leq rg(a) + rg(b)$ .

---

**Exercice 22.6** : (niveau 1)

On suppose que  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Démontrer que  $A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$ .

En déduire qu'il existe deux suites  $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$ .

En déduire le calcul de  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 22.7** : (niveau 1)

Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 22.8** : (niveau 1)

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . On note  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z + a\bar{z}$ .

1°) Montrer que  $f$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire mais qu'elle n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire.

2°) Déterminer la matrice de  $f$  dans la  $\mathbb{R}$ -base  $(1, i)$ .

3°) Déterminer les noyau et image de  $f$ .

**Exercice 22.9** : (niveau 1)

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ .

$u$  désigne un endomorphisme de  $L(E)$  tel que  $u^n = 0$  et  $u^{n-1} \neq 0$ .

Chercher une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  a une forme simple.

**Exercice 22.10** : (niveau 1)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension paire  $n = 2p$  et  $f \in L(E)$ .

Etablir l'équivalence des trois propositions :

1)  $f^2 = 0$  et  $\text{rg}(f) = p$ ;

2)  $\text{Im} f = \text{Ker} f$ ;

3) il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 22.11** : (niveau 2)

On suppose que  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique nulle.

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1°) Vérifier que  $A^3 - 7A^2 + 13A = 3I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible.

2°) La matrice  $B$  est-elle inversible? Calculer  $B^3$ .

3°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $M$  satisfait la relation polynomiale  $a_p M^p + \dots + a_1 M + a_0 I_n = 0$ , où  $p \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$  et  $a_p \neq 0$ . On suppose de plus que  $M$  ne satisfait pas de relation polynomiale (avec des coefficients non tous nuls) de degré strictement inférieur à  $p$ .

A quelle condition la matrice  $M$  est-elle inversible?

**Exercice 22.12** : (niveau 2)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , inverser la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , à l'aide de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 22.13** : (niveau 2)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n)$  telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$ .

Montrer que  $A$  est inversible.

**Exercice 22.14** : (niveau 2)

Fixons  $M$  appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1°) Montrer que l'application  $A \mapsto \text{Tr}(AM)$  où  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2°) A-t-on ainsi toutes les formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

---

**Exercice 22.15** : (niveau 2)

Notons  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\sigma$  une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que :  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \sigma(AB) = \sigma(BA)$ .

1°) Pour tout  $i, j, k, h \in \{1, \dots, n\}$ , montrer que  $E_{i,j}E_{k,h} = \delta_{j,k}E_{i,h}$ .

2°) Pour  $i \neq j$ , calculer  $\sigma(E_{i,j})$ .

3°) Comparer  $\sigma(E_{i,i})$  et  $\sigma(E_{j,j})$ .

4°) En déduire l'ensemble des applications linéaires  $\sigma$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \sigma(AB) = \sigma(BA)$ .

**Exercice 22.16** : (niveau 2)

Calculer le rang de la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le  $(i, j)$ <sup>ème</sup> coefficient est égal à  $\sin(i+j)$ .

**Exercice 22.17** : (niveau 2)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1°) Montrer que  $\text{rg}(A) = 1$  si et seulement si il existe  $X, Y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  tels que  $A = X^t Y$ .

2°) On suppose que  $\text{rg}(A) = 1$ .

a) Montrer que  $A^2 = \text{Tr}(A)A$ .

b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $(I_n + A)^k$ .

**Exercice 22.18** : (niveau 2)

Polynômes d'interpolation d'Hermite :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .  $n_0, \dots, n_p$  désignent  $p+1$  entiers strictement positifs tels que  $n_0 + \dots + n_p = n$ .

Soient  $a_0, \dots, a_p$   $p+1$  éléments d'un sous-corps de  $\mathbb{C}$  noté  $\mathbb{K}$ , et pour tout  $i \in \{0, \dots, p\}$ , pour tout  $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ , soit  $u_{i,j} \in \mathbb{K}$ .

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $u$  de degré strictement inférieur à  $n$  tel que pour tout  $i \in \{0, \dots, p\}$  et pour tout  $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ ,  $u^{(j)}(a_i) = u_{i,j}$ .

**Exercice 22.19** : (niveau 2)

$E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

On suppose que  $E$  est de dimension finie. Soit  $u \in L(E, F)$ .

Montrer que  $\dim(u^{-1}(G)) = \dim(E) - \text{rg}(u) + \dim(\text{Im}(u) \cap G)$ .

**Exercice 22.20** : (niveau 2)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $s \geq 1$ . Montrer que les suites  $(\text{Ker}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\text{Im}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont stationnaires à partir du même rang  $p \leq s$  et que l'on a alors :  $\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E$ .

**Exercice 22.21** : (niveau 3)

$E, F, G$  et  $H$  désignent 4  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit  $f \in L(E, F)$ ,  $g \in L(F, G)$  et  $h \in L(G, H)$ . Montrer que  $\text{rg}(gf) + \text{rg}(hg) \leq \text{rg}(g) + \text{rg}(hgf)$ .

---

**Exercice 22.22** : (niveau 3)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$  et  $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p)$ . On note  $\Psi$  l'application de  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$  dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$  définie par :  $\Psi(M) = AMB$ .

Montrer que  $Tr(\Psi) = Tr(A) \times Tr(B)$ .

**Exercice 22.23** : (niveau 3)

Montrer que les seuls idéaux bilatères de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont  $\{0\}$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

*Indication* : on pourra commencer par montrer qu'un idéal bilatère non nul de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède au moins une matrice de rang 1.

**Exercice 22.24** : (niveau 3)

Pour tout  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on dit que A est positive si et seulement si

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} \geq 0$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on dit que A est monotone si A est inversible et  $A^{-1}$  est positive.

1°) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que A est monotone si et seulement si

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX$  positive  $\implies X$  positive.

2°) Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 + a_1 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & -1 & 2 + a_n \end{pmatrix}$  (les coefficients sont

égaux à 0 hors de la diagonale, et des sur- et sous-diagonales). Montrer que A est monotone.

---

## Exercices supplémentaires

**Exercice 22.25** : (niveau 1)

Déterminer la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par  $f(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$ .

**Exercice 22.26** : (niveau 1)

Soit  $A, B, C$  trois matrices non nulles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $ABC = 0$ .

Montrer qu'au moins 2 de ces matrices ne sont pas inversibles.

**Exercice 22.27** : (niveau 1)

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que  $A$  et  $B$  commutent si et seulement si  $AB$  est symétrique.

**Exercice 22.28** : (niveau 1)

Déterminer la matrice  $M$  canoniquement associée à l'application linéaire  $f$ , de  $\mathbb{R}^3$  dans

$\mathbb{R}^2$  définie par :  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y - 2x + z \end{pmatrix}$ .

Déterminer le noyau et l'image de la matrice  $M$ .

**Exercice 22.29** : (niveau 1)

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .  $f$  désigne l'endomorphisme de  $E$  défini par : pour tout  $P \in E$ ,  $f(P) = P - P'$ .

1°) Montrer que  $f$  est bijective

- a) sans la matrice de  $f$ ,
- b) avec la matrice de  $f$ .

2°) Montrer que pour tout  $Q \in E$ , il existe  $P$  tel que  $P - P' = Q$ . Donner une expression de  $P$  en fonction de  $Q$ .

**Exercice 22.30** : (niveau 1)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, \dots, u_n)$  un système de  $n$  vecteurs de rang  $r$ . Soit  $m \in \mathbb{N}_n$ . Notons  $s$  le rang de  $(u_1, \dots, u_m)$ .

1°) Montrer que  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m) + \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$ .

2°) Montrer que  $n - r \geq m - s$ .

**Exercice 22.31** : (niveau 1)

$\Phi$  désigne l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans lui-même définie par  $\Phi(P) = P(X) - P(X - 1)$ .

1°) Donner la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2°) Donner  $\text{Ker}(\Phi)$  et  $\text{Im}(\Phi)$ .

**Exercice 22.32** : (niveau 1)

On suppose que  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = AB - BA$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\text{Tr}(A^p)$ .

---

**Exercice 22.33** : (niveau 1)

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $a_0, \dots, a_n$   $n + 1$  réels distincts.

1°) Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\Phi_k$  la forme linéaire sur  $E$  définie par :

$\Phi_k(P) = P(a_k)$ . Montrer que  $(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $L(E, \mathbb{R})$ .

2°) Montrer qu'il existe un unique polynôme  $A \in E$  tel que, pour tout  $P \in E$ ,

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n A(a_k) P(a_k).$$

**Exercice 22.34** : (niveau 2)

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  : on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble de ces matrices.

Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$X + Tr(X)A = B.$$

**Exercice 22.35** : (niveau 2)

Soit  $(p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On note  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le  $(i, j)$ <sup>ème</sup> coefficient est égal à  $(p + i + j - 2)^2$ . Déterminer le rang de  $M$ .

**Exercice 22.36** : (niveau 2)

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $AMB = 0$ .

Montrer que  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

**Exercice 22.37** : (niveau 2)

On suppose que le corps  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle.

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $AB - BA \neq I_n$ .

Donner un exemple d'espace vectoriel  $E$  et d'endomorphismes  $u, v \in L(E)$  tels que  $uv - vu = Id_E$ .

**Exercice 22.38** : (niveau 2)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer qu'il existe  $u \in L(E)$  tel que  $F = Im(u)$  et  $G = Ker(u)$  si et seulement si  $dim(F) + dim(G) = dim(E)$ .

**Exercice 22.39** : (niveau 2)

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices de taille  $n$  à coefficients réels.

$S_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices  $A = (a_{i,j})$  appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

Pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$   $a_{i,i} \geq a_{i,j} \geq 0$ , et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

1°) Montrer que pour tout  $P$  appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $Tr({}^t P P) \geq 0$ .

2°) Montrer que pour tout  $P$  appartenant à  $S_n(\mathbb{R})$ ,  $Tr({}^t P P) \leq Tr(P)$ .

3°) Trouver toutes les matrices de  $S_n(\mathbb{R})$  telles que l'inégalité précédente soit une égalité.

---

4°) Dénombrer les matrices de la question précédente.

**Exercice 22.40** : (niveau 2)

Soient  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  est inversible et que  $B^n = 0$ .

Montrer que  $C = I_n + A^{-1}BA$  est inversible et préciser son inverse.

**Exercice 22.41** : (niveau 2)

Soit  $(P_n)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$  telle que :

$\forall n \in \mathbb{N} \deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$ . Montrez que  $(P_n)$  est une base si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $\deg(P_n) = n$ .

**Exercice 22.42** : (niveau 2)

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies et  $(u, v) \in L(E, F)^2$ .

Montrer que  $\dim(\text{Ker}(u + v)) \leq \dim(\text{Ker}u \cap \text{Ker}v) + \dim(\text{Im}u \cap \text{Im}v)$ .

**Exercice 22.43** : (niveau 2)

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fixe  $u \in L(E)$  tel que  $u^2 = 0$ .

Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  et une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  a des coefficients tous nuls sauf ceux de position  $(i + r, i)$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , qui sont égaux à 1.

**Exercice 22.44** : (niveau 2)

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathbb{C}[X]$ .

1°) Montrer que  $F$  possède une base constituée de polynômes ayant tous le même degré.

2°) Montrer que  $F$  possède une base  $(P_1, \dots, P_n)$  pour laquelle la suite  $(\deg(P_i))_{1 \leq i \leq n}$  est strictement croissante.

**Exercice 22.45** : (niveau 2)

Notons  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$  : ainsi, pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $E_{i,j}$  est la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de position  $(i, j)$  qui est égal à 1.

1°) Calculer  $E_{i,j}E_{k,l}$ .

2°) On pose  $\mathcal{T} = \text{Vect}(\{AB - BA / (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)^2\})$  et  $\mathcal{H} = \{\lambda I_n / \lambda \in \mathbb{R}\}$ , où  $I_n$  désigne la matrice identité.

Montrer que  $\dim(\mathcal{T}) = n^2 - 1$  et en déduire que  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$ .

**Exercice 22.46** : (niveau 3)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1°) Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  avec  $A^n = 0$ ,  $AB = BA$  et  $B \neq 0$ .

Montrer que  $\text{rg}(AB) < \text{rg}(B)$ .

2°) Soit  $A_1, \dots, A_n$   $n$  matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent deux à deux.

Montrer que  $A_1 \times \dots \times A_n = 0$ .



---

**Exercice 22.47** : (niveau 3)

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  telle que  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ .

On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  pour lesquelles :

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} \exists (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2 \forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \quad f(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

1°) Montrer que  $\mathcal{F}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2°) Pour  $f \in \mathcal{F}$ , on pose  $\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2) - f(a_1), \dots, f(a_n) - f(a_{n-1}))$ .  
A l'aide de  $\varphi$ , montrer que  $\dim(\mathcal{F}) \leq n$ .

3°) Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |x - a_j|$ .

Montrer que  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$  est une base de  $\mathcal{F}$ .

4°) Montrer que les éléments convexes de  $\mathcal{F}$  sont ceux de la forme :

$$x \mapsto \alpha x + \beta + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j |x - a_j|, \text{ où } \forall j \in \{2, \dots, n-1\} \quad \gamma_j \geq 0.$$

**Exercice 22.48** : (niveau 3)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in L(E)$ .

Notons  $\mathcal{P} = \{P(u)/P \in \mathbb{K}[X]\}$  et  $\mathcal{C} = \{v \in L(E)/v \circ u = u \circ v\}$ .

1°) Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{C}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $L(E)$  et que  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ .

2°) Soit  $x \in E$ . Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $x$  qui est stable par  $u$  est  $F_x = \{P(u)(x)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ .

3°) Si  $x \in E$ , on dira que  $x$  est  $u$ -générateur si et seulement si  $F_x = E$ .

Notons  $\varphi_x : L(E) \rightarrow E$   
 $v \mapsto v(x)$ . Montrer que  $x$  est  $u$ -générateur si et seulement si  $\varphi_{x/\mathcal{P}}$  est surjective.

4°) Montrer que si  $x$  est  $u$ -générateur alors  $\varphi_{x/\mathcal{C}}$  est injective.

En déduire que si  $E$  possède un  $u$ -générateur, alors  $\mathcal{P} = \mathcal{C}$  et  $E$  est isomorphe à  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 22.49** : (niveau 3)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1°) Déterminer les endomorphismes  $f$  de  $E$  tels que  $\forall x \in E \quad (x, f(x))$  est lié.

2°) En déduire  $\{g \in L(E)/\forall h \in GL(E) \quad h \circ g = g \circ h\}$ .

3°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $g_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad g_n(P) = P'.$$

On note  $C(g_n) = \{f \in L(\mathbb{R}_n[X])/f \circ g_n = g_n \circ f\}$ . Déterminer  $\dim(C(g_n))$ , puis déterminer  $C(g_n)$ .

---

**Exercice 22.50** : (niveau 3)

On note  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , triangulaire supérieure, dont tous les coefficients du triangle supérieur (diagonale comprise) sont égaux à 1. Calculer  $M^3$ .

**Exercice 22.51** : (niveau 3)

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_p$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $(M_1, \dots, M_p) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^p$ ,  
 $Tr(M_1 \times \dots \times M_p) = Tr(M_{\sigma(1)} \times \dots \times M_{\sigma(p)})$ .

**Exercice 22.52** : (niveau 3)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  un nombre premier.

1°) Pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ , montrer que  $Tr((A + B)^p) \equiv Tr(A^p) + Tr(B^p) [p]$ .

2°) En déduire que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ,  $Tr(A^p) \equiv Tr(A) [p]$ .