

Résumé de cours :
Semaine 27, du 28 avril au 2 mai.

Les matrices (fin)

1 L'algèbre des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre, ni commutative ni intègre dès que $n \geq 2$.

Définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Propriété. $\begin{matrix} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n) & \longrightarrow & L(\mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{matrix}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$.
- \tilde{A} est inversible dans $L(\mathbb{K}^n)$ (auquel cas, $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$).
- Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $Y \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = Y$.
- A est inversible à droite.
- A est inversible à gauche.
- $\text{Ker}(A) = \{0\}$, i.e pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = 0 \implies X = 0$.
- \tilde{A} est surjective, i.e $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(M) \stackrel{\Delta}{=} ad - cb \neq 0$, et

dans ce cas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule de Cramer : Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}^4$. Lorsque $\det = ad - cb \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \iff x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det} \wedge y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Notation. $GL_n(\mathbb{K}) =$ groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On l'appelle le groupe linéaire de degré n .

Exemple. Un automorphisme intérieur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M \mapsto AMA^{-1}$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ forment une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $c_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $F_i = \text{Vect}(c_k)_{1 \leq k \leq i}$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est triangulaire supérieure ssi, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, F_j est stable par \tilde{M} .

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $n \geq 2$.

- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement : inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre non commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Le produit d'une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est (a_1, \dots, a_n) par une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est (b_1, \dots, b_n) est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$.
- Une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est (a_1, \dots, a_n) est inversible si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i \neq 0$ et dans ce cas, son inverse est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n})$.

Il faut savoir le démontrer.

2 Transposée d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. On appelle *transposée de la matrice* A et on note ${}^t A$ la matrice de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n)$ définie par $[{}^t A]_{i,j} = A_{j,i}$.

Propriété. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, ${}^t({}^t A) = A$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n) \\ M & \longmapsto & {}^t M \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Propriété. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) \times \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Alors, ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^t A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Définition. M est une *matrice symétrique* si et seulement si ${}^t M = M$.

M est une *matrice antisymétrique* si et seulement si ${}^t M = -M$.

Remarque. Lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, sa diagonale est nulle.

Notation. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n .

$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .

Propriété. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais ce ne sont pas des sous-algèbres. Cependant, elles sont stables par passage à l'inverse. De plus, lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}, \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il faut savoir le démontrer.

3 Différentes interprétations du produit matriciel

Au niveau des colonnes de la matrice de droite : Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. Si B_1, \dots, B_q sont des vecteurs colonnes de \mathbb{K}^p , $A \times \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_q \end{bmatrix}$.

Au niveau des colonnes de la matrice de gauche :

- Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $X \in \mathbb{K}^p$, MX est une combinaison linéaire des colonnes de M .

Plus précisément, si l'on note M_1, \dots, M_p les colonnes de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$,

$$MX = x_1 M_1 + \dots + x_p M_p.$$

- Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A : en notant A_1, \dots, A_p les colonnes de A et $B = (b_{i,j})$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est égale à $b_{1,j}A_1 + \dots + b_{p,j}A_p$.

Au niveau des lignes de la matrice de gauche : Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Notons

$${}_1A, \dots, {}_nA \text{ les lignes de } A. \text{ Alors } AB = \begin{pmatrix} \boxed{{}_1A} \\ \vdots \\ \boxed{{}_nA} \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} \boxed{{}_1AB} \\ \vdots \\ \boxed{{}_nAB} \end{pmatrix}.$$

Au niveau des lignes de la matrice de droite :

- Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $X \in \mathcal{M}_{1,n}$, XM est une combinaison linéaire des lignes de M . Plus précisément, si l'on note ${}_1M, \dots, {}_nM$ les lignes de M et $X = (x_1 \ \dots \ x_n)$, $XM = x_1 \times {}_1M + \dots + x_n \times {}_nM$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B : en notant ${}_1B, \dots, {}_pB$ les lignes de B et $A = (a_{i,j})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est égale à $a_{i,1} \times {}_1B + \dots + a_{i,p} \times {}_pB$.

4 Trace d'une matrice

Définition. La *trace de la matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $Tr(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

Propriété. La trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Il faut savoir le démontrer.

ATTENTION : Si $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$, en général $Tr(ABC) \neq Tr(ACB)$.

Définition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

La relation de similitude ("être semblable à") est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp : trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp : triangulaire supérieure).

Propriété. Deux matrices semblables ont la même trace, mais la réciproque est fautive.

Il faut savoir le démontrer.

5 Matrices décomposées en blocs

5.1 Matrices extraites

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et soit I et J deux parties de \mathbb{N} telles que $|I| = n$ et $|J| = p$. Notons $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ les éléments de I et $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_p$ les éléments de J .

Alors on convient d'identifier toute famille $(M_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ de **scalaires** indexée par $I \times J$ avec la matrice $(M_{i_h, j_k})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$.

Remarque. Lorsque I ou J est vide, $I \times J = \emptyset$ et $\mathbb{K}^{I \times J}$ possède un unique élément, que l'on appellera la matrice vide.

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. Une matrice extraite de M est une matrice de la forme $(M_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, où $I \subset \mathbb{N}_n$ et $J \subset \mathbb{N}_p$.

5.2 Définitions

Définition. Soient $(n_1, \dots, n_a) \in (\mathbb{N}^*)^a$ et $(p_1, \dots, p_b) \in (\mathbb{N}^*)^b$. On pose $n = \sum_{i=1}^a n_i$ et $p = \sum_{j=1}^b p_j$.

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$, considérons une matrice $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n_i, p_j)$. Alors la famille de ces matrices $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}}$ peut être identifiée à une matrice possédant n lignes et p colonnes. On dit que M est une **matrice décomposée en blocs**, de dimensions (n_1, \dots, n_a) et (p_1, \dots, p_b) .

Définition. Avec ces notations, M est une **matrice triangulaire supérieure par blocs** si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$ tel que $i > j$, $M_{i,j} = 0$.

De même on définit la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs.

La matrice $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}}$ est une **matrice diagonale par blocs** si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$ tel que $i \neq j$, $M_{i,j} = 0$.

5.3 Opérations sur les matrices blocs

Combinaison linéaire de matrices décomposées en blocs : Soient $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}}$ et $N = (N_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}}$ deux matrices décomposées en blocs selon les mêmes partitions $(I_i)_{1 \leq i \leq a}$ et $(J_j)_{1 \leq j \leq b}$ respectivement de \mathbb{N}_n et de \mathbb{N}_p . Alors, $\forall u \in \mathbb{K}$, $uM + N = (uM_{i,j} + N_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}}$.

Produit matriciel de deux matrices décomposées en blocs : soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}}$ une matrice décomposée en blocs selon les partitions $(I_i)_{1 \leq i \leq a}$ et $(J_j)_{1 \leq j \leq b}$ respectivement de \mathbb{N}_n et de \mathbb{N}_p . Soit $N = (N_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq b \\ 1 \leq k \leq c}}$ une matrice décomposée en blocs selon le même partition $(J_j)_{1 \leq j \leq b}$ de \mathbb{N}_p et une partition $(K_k)_{1 \leq k \leq c}$ de \mathbb{N}_q .

Alors MN peut être vue comme une matrice décomposée en blocs selon les partitions $(I_i)_{1 \leq i \leq a}$ de \mathbb{N}_n et $(K_k)_{1 \leq k \leq c}$ de \mathbb{N}_q et $MN = \left(\sum_{j=1}^b M_{i,j} N_{j,k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq k \leq c}}$.

En résumé, le produit de deux matrices par blocs se comporte comme le produit matriciel usuel.

Application : Produit de matrices triangulaires (resp : diagonales) par blocs, puissances de telles matrices.

6 La notion de rang

6.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soient E un espace vectoriel et x une famille de vecteurs de E .

Le rang de x est $\text{rg}(x) \triangleq \dim(\text{Vect}(x)) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété. Pour une famille x de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E ,

- $\text{rg}(x) \leq \#(x)$. Lorsque $\text{rg}(x) < +\infty$, il y a égalité si et seulement si x est libre.
- $\text{rg}(x) \leq \dim(E)$. Lorsque $\text{rg}(x) < +\infty$, il y a égalité si et seulement si x est génératrice.

Propriété.

Soit $u \in L(E, F)$ et x une famille de vecteurs de E .

Alors $\text{rg}(u(x)) \leq \text{rg}(x)$, avec égalité lorsque $\text{rg}(x) < +\infty$ et u injective.

Propriété. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors $\text{rg}(x_i)_{i \in I}$ n'est pas modifié si l'on échange l'ordre de deux vecteurs, si l'on multiplie l'un des vecteurs x_i par un scalaire non nul, ou bien si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j .

6.2 Rang d'une application linéaire

Théorème. Soit $u \in L(E, F)$.

Si H est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , alors $u|_H^{\text{Im}(u)}$ est un isomorphisme.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: il s'agit du rang de l'application linéaire u .

Propriété. Si e est une base de E et $u \in L(E, F)$, alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e))$.

Formule du rang. Soit $u \in L(E, F)$ avec E de dimension finie.

Alors $\text{rg}(u)$ est fini et $\boxed{\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E)}$.

Propriété. Si $u \in L(E, F)$, alors $\text{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$. De plus, lorsque E est de dimension finie, $\text{rg}(u) = \dim(E)$ si et seulement si u est injective et lorsque F est de dimension finie, $\text{rg}(u) = \dim(F)$ si et seulement si u est surjective.

Théorème. $\text{rg}(v \circ u) \leq \inf(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

On ne modifie par le rang d'une application linéaire en la composant avec un isomorphisme (à sa gauche ou à sa droite).

6.3 Rang d'une matrice

Définition. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, le rang de M est $\text{rg}(M) \stackrel{\Delta}{=} \text{rg}(\tilde{M}) = \dim(\text{Im}(M))$.

Le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Propriété. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\text{rg}(M) = n$.

Propriété. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) \times \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Alors, $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.

On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.

Il faut savoir le démontrer.

7 Matrice d'une application linéaire

Définition. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$. Soient $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Si $u \in L(E, F)$, on appelle **matrice de l'application linéaire** u dans les bases e et f la matrice notée $\text{mat}(u, e, f) = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ définie par l'une des conditions équivalentes suivantes :

- pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in \mathbb{N}_p$, $\alpha_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur $u(e_j)$ dans la base f .
- pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in \mathbb{N}_p$, $[\text{mat}(u, e, f)]_{i,j} = f_i^*(u(e_j))$.
- $\text{mat}(u, e, f)$ est l'unique matrice $(\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ vérifiant : $\forall j \in \mathbb{N}_p \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} f_i$.
- $\text{mat}(u, e, f)$ est l'unique matrice dont la j -ème colonne, égale à $\Psi_f^{-1}(u(e_j))$, contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base f .

Interprétation tabulaire : Avec les notations précédentes,

$$\text{mat}(u, e, f) = \begin{pmatrix} u(e_1) & \cdots & u(e_p) \\ m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} .$$

Notation. Lorsque $E = F$ et que l'on choisit $e = f$, on note $\text{mat}(u, e)$ au lieu de $\text{mat}(u, e, e)$.

Propriété. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, $\boxed{\text{mat}(\tilde{M}, c, c') = M}$, en notant c et c' les bases canoniques de \mathbb{K}^p et de \mathbb{K}^n .

Remarque. Nous disposons maintenant de deux manières équivalentes de définir l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$: c'est l'application $\tilde{M} : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$, $X \mapsto \tilde{M}(X) = MX$, ou bien c'est l'unique application $\tilde{M} \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\text{mat}(\tilde{M}, c, c') = M$.

Propriété. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases e et f et soit $u \in L(E, F)$. Alors $\text{rg}(\text{mat}(u, e, f)) = \text{rg}(u)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$. Soient $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

L'application $L(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, $u \mapsto \text{mat}(u, e, f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème. Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases e, f et g . Soient $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$. Alors, $\text{mat}(v \circ u, e, g) = \text{mat}(v, f, g) \times \text{mat}(u, e, f)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$, munis des bases $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, et soit $u \in L(E, F)$.

On note M la matrice de u dans les bases e et f .

Soit $(x, y) \in E \times F$. On note X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base e , et Y celle des coordonnées de y dans la base f . Alors,

$$\boxed{u(x) = y \iff MX = Y.}$$

Propriété. On reprend les notations précédentes. Lorsque $n = p$, u est un isomorphisme si et seulement si M est une matrice inversible et dans ce cas, $\text{mat}(u, e, f)^{-1} = \text{mat}(u^{-1}, f, e)$.

Propriété. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie égale à n , muni d'une base e . L'application $L(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u \mapsto \text{mat}(u, e)$ est un isomorphisme d'algèbres.

8 Les systèmes linéaires

8.1 Trois interprétations d'un système linéaire

Définition. Une équation linéaire à p inconnues scalaires est une équation de la forme

$(E) : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = b$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_p, b \in \mathbb{K}$ sont des paramètres, et où $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues.

Notation. Fixons $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et considérons un système linéaire à n équations et p inconnues, c'est-à-dire un système d'équations de la forme suivante :

$$(S) : \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i,1}x_1 + \dots + \alpha_{i,p}x_p = b_i \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}x_1 + \dots + \alpha_{n,p}x_p = b_n \end{cases},$$

où, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i \in \mathbb{K}$, les p inconnues étant x_1, \dots, x_p , éléments de \mathbb{K} .

Le vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre du système, ou bien le membre constant. Lorsqu'il est nul, on dit que le système est homogène.

Première interprétation. *Combinaison linéaire de vecteurs.*

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \vdots \\ \alpha_{i,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix}$, ..., $C_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1,p} \\ \vdots \\ \alpha_{i,p} \\ \vdots \\ \alpha_{n,p} \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Il s'agit de $p+1$ vecteurs de \mathbb{K}^n . Alors $(S) \iff x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_p C_p = B$.

Définition. On dit que (S) est **compatible** si et seulement s'il admet au moins une solution.

Propriété. (S) est compatible si et seulement si $B \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Deuxième interprétation. *Matricielle.* Notons M la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont C_1, \dots, C_p , et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Alors $(S) \iff MX = B$.

Définition. On dit que (S) est un **système de Cramer** si et seulement si $n = p$ et si M est inversible. Dans ce cas, (S) admet une unique solution.

Troisième interprétation. *A l'aide d'une application linéaire.*

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions p et n munis de bases $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$. On note u l'unique application linéaire de $L(E, F)$ telle que $\text{mat}(u, e, f) = M$, x le vecteur de E dont les coordonnées dans e sont X et b le vecteur de F dont les coordonnées dans f sont B . Alors $(S) \iff u(x) = b$.

Définition. On dit que (S) est un **système homogène** si et seulement si $b = 0$.

Définition. Le système homogène associé à (S) est $(S_H) : u(x) = 0$.

Propriété. L'ensemble des solutions de (S_H) est $\text{Ker}(u)$.

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $p - r$, où r désigne le rang de u (ou de M).