Résumé de cours :
Semaine 28, du 5 au 9 mai.

Les systèmes linéaires (suite et fin)

1 Les opérations élémentaires

Définition. On appelle manipulations ou opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, les applications de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ suivantes :

1) Ajouter à une ligne le multiple d'une autre, opération notée : $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. C'est une transvection.
2) Multiplier une ligne par un scalaire non nul, notée : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$. C'est une affinité.
3) Permuter deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$, où $i \neq j$. C'est une transposition.

On définirait de même les opérations sur les colonnes.

Propriété. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété.
En notant $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ avec $i \neq j$,

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & (I_n + \lambda E_{i,j})M \end{array}$$

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & (I_n + (\lambda-1) E_{i,i})M \end{array}$$

$$L_i \longleftrightarrow L_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & P_{(i,j)}M \end{array}$$

De même, en notant $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$ avec $i \neq j$, alors

$$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & M(I_p + \lambda E_{j,i}) \end{array}$$

$$C_i \longleftarrow \lambda C_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & M(I_p + (\lambda-1) E_{i,i}) \end{array}.$$

$$C_i \longleftrightarrow C_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & MP_{(i,j)} \end{array}$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si l'on effectue une série d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice M, alors on a multiplié M à gauche par une certaine matrice inversible.

Si l'on effectue une série d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice M, alors on a multiplié M à droite par une certaine matrice inversible.

Notation. Soit (S) : $MX = B$ un système linéaire de matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de vecteur constant $B \in \mathbb{K}^n$. On appellera matrice globale de (S) la matrice à n lignes et $p+1$ colonnes dont les p premières colonnes sont celles de M et dont la dernière colonne est égale à B.

Propriété. Soient $(S) : MX = B$ et $(S') : M'X = B'$. On suppose que l'on peut passer de la matrice **globale** de (S) à celle de (S') à l'aide d'une série d'opérations élémentaires portant uniquement sur les lignes. Alors ces deux systèmes sont équivalents.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'on peut transformer, par des opérations élémentaires portant uniquement sur les lignes, la matrice blocs $\boxed{M}\boxed{I_n} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, 2n)$ en une matrice de la forme $\boxed{I_n}\boxed{N} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, 2n)$. Alors M est inversible et $M^{-1} = N$.
Il faut savoir le démontrer.

2 Méthode du pivot de Gauss

Notation. On souhaite résoudre le système $(S) : MX = B$ de n équations à p inconnues. La matrice globale du système sera notée $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p + 1)$. Pour simplifier les notations, si on transforme $(a_{i,j})$ par des opérations élémentaires, le résultat sera encore noté $(a_{i,j})$.

But : Transformer $(a_{i,j})$ de sorte que : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\} \quad i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.
Pour cela, si l'on suppose que les $r - 1$ premières colonnes de $(a_{i,j})$ sont déjà bien formées :
Premier cas : $\forall i \in \{r, \dots, n\} \quad a_{i,r} = 0$: on passe à l'étape suivante.
Second cas : $\exists i_0 \in \{r, \dots, n\} \quad a_{i_0,r} \neq 0$: On dit que $a_{i_0,r}$ est le pivot de l'étape r.
On permute d'abord les lignes L_{i_0} et L_r. Ainsi $a_{r,r} \neq 0$. Ensuite on effectue la série d'opérations élémentaires : for i from $r + 1$ to n do $L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,r}}{a_{r,r}} L_r$ *od.*
Il faut être capable de présenter cet algorithme en détails.

Remarque. Comme on n'effectue que des opérations élémentaires sur les lignes, les lignes de la matrice finale du système engendrent le même espace vectoriel que les lignes de la matrice initiale. La méthode du pivot permet donc de déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par les lignes (ou les colonnes en opérant sur les colonnes) d'une matrice.
La méthode du pivot permet aussi de déterminer une base de l'image d'une application linéaire : On considère sa matrice dans des bases données et on détermine une base de ses vecteurs colonnes en appliquant la méthode du pivot au niveau des colonnes.

3 Méthode du pivot total

But : Transformer $(a_{i,j})$ de sorte qu'il existe $s \in \{0, \min(n, p)\}$ vérifiant
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_s^2,\ \ i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, $\forall r \in \mathbb{N}_s,\ \ a_{r,r} \neq 0$ et $\forall (i, j) \in \{s + 1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},\ \ a_{i,j} = 0$.
La seule différence par rapport à l'algorithme précédent est qu'on accepte de choisir le pivot de l'étape r parmi les $a_{i,j}$ pour $(i, j) \in \{r, \dots, n\} \times \{r, \dots, p\}$. Notons $a_{i_0,j_0} \neq 0$ le pivot choisi. On échange C_r et C_{j_0} puis on applique les mêmes opérations élémentaires que dans l'algorithme précédent.

⋄ À la fin de l'algorithme, le système est compatible si et seulement si $\forall i \in \{s+1, \dots, n\} \quad a_{i,p+1} = 0$: c'est un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de (S).
Si la matrice de (S) est celle d'une application linéaire u dans des bases e et f, ces conditions de compatibilité constituent un système d'équations de $Im(u)$ dans la base f.

Définition. Résoudre un système (S) : $\quad MX = B$ à n équations et p inconnues, c'est déterminer une partie I de $\{1, \dots, p\}$ et une famille $(b_{i,j})_{(i,j) \in (\{1,\dots,p\} \setminus I) \times I}$ telles que :

$\forall i \in \{1, \dots, p\} \setminus I,\ \ x_i = c_i + \sum_{j \in I} b_{i,j} x_j$. Les $(x_j)_{j \in I}$ sont les inconnues principales et les $(x_i)_{i \in \{1,\dots,p\} \setminus I}$ sont les inconnues secondaires. En résumé, résoudre un système, c'est exprimer les inconnues secondaires en fonction des inconnues principales.

4 Méthode de Gauss-Jordan, lorsque le système est de Cramer

But : Transformer la matrice globale en une matrice dont les n premières colonnes correspondent à la matrice I_n, en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes.
Pour cela, comme pour le pivot partiel, à l'étape r, on choisit un pivot $a_{i_0,r} \neq 0$ où $r \leq i_0 \leq n$, ce qui est possible car le système est de Cramer, puis on effectue : $L_{i_0} \longleftrightarrow L_r$,
$\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\},\ \ L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,r}}{a_{r,r}} L_r$ et $L_r \longleftarrow \frac{1}{a_{r,r}} L_r$.
Il faut être capable de présenter cet algorithme en détails.

Corollaire. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est le produit de matrices de transvections, d'affinités et de transpositions.

Sommes de sous-espaces vectoriels

5 Sommes et sommes directes

Définition. Si les E_i sont des sev de E, $E_1 + \cdots + E_k = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i \right)$.

Propriété. $E_1 + \cdots + E_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ / \ \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad x_i \in E_i \right\}$.

Définition. $\sum_{i=1}^{k} E_i$ est ***directe***, et alors notée $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$, si et seulement si

$\forall (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad \left(\sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, k\}\ \ x_i = 0) \right)$,

ce qui est équivalent à : $\forall x \in \sum_{i=1}^{k} E_i$, $\exists! (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

6 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Propriété. $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Propriété. Si $x \notin F$, F et $\mathbb{K}x$ sont en somme directe.
Deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe.

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont ***supplémentaires*** (dans E) si et seulement si $E = F \oplus G$, i.e $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$, i.e $\forall x \in E,\ \ \exists! (x_1, x_2) \in F \times G,\ \ x = x_1 + x_2$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F admet au moins un supplémentaire, et pour tout supplémentaire G de F, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Remarque. En dimension quelconque, tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire, si l'on accepte l'axiome du choix.

Propriété. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
De plus $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Il faut savoir le démontrer.

7 Propriétés des sommes directes

7.1 Un moyen de définir une application linéaire

Théorème. Soit $(E_i)_{1\le i\le k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{1\le i\le k} E_i$. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et, pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, soit u_i une application linéaire de E_i dans F. Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, la restriction de u à E_i est égale à u_i. Ainsi, pour définir une application linéaire u de E dans F, il suffit de préciser ses restrictions aux sous-espaces vectoriels E_i.

7.2 Formules dimensionnelles

Propriété. $\dim\Big(\sum_{i=1}^{k} E_i\Big) \le \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$, $\boxed{\text{avec égalité si et seulement si la somme est directe}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Ainsi, lorsque E est de dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, ils sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
Il faut savoir le démontrer.

7.3 Associativité des sommes directes

Propriété. ***Associativité d'une somme directe.*** Si $(I_i)_{1\le i\le p}$ est une partition de $\{1,\dots,k\}$, alors $E_1,\dots,E_k$ forment une somme directe si et seulement si $\forall i \in \{1,\dots,p\}$, $(E_j)_{j\in I_i}$ forment une somme directe et $\Big(\bigoplus_{j\in I_i} E_j\Big)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ forment une somme directe.

Théorème. Soient k un entier supérieur ou égal à 2, et $(E_i)_{1\le i\le k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E. $E_1,\dots,E_k$ sont en somme directe si et seulement si $\forall i \in \{2,\dots,k\}$ $E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$.

7.4 Base adaptée à une décomposition en somme directe

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Soit $(I_k)_{1\le k\le n}$ une partition de I. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on pose $E_k = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I_k}$. Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

Théorème réciproque. Soit $(E_k)_{1\le k\le n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on suppose que E_k admet une base b_k. Alors la concaténation des bases $(b_k)_{1\leq k\leq n}$, notée b, est une base de E. On dit que b est une ***base adaptée à la décomposition en somme directe*** $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

Définition. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle ***base de*** E ***adaptée*** à F toute base obtenue en complétant une base de F.

8 Les projecteurs

Définition. $p \in L(E)$ est un ***projecteur*** si et seulement si $p^2 = p$.

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour $x \in E$, on note $(p(x), q(x))$ l'unique couple de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.
p et q sont des projecteurs.
p est appelé le projecteur sur F parallèlement à G, et q le ***projecteur associé*** à p.
On vérifie que $p + q = Id_E$ et $pq = qp = 0$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété réciproque. Soit p un projecteur de E. Alors p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. La décomposition de $x \in E$ selon la somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ est $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in F = \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in G = \mathrm{Ker}(p)$.
Pour tout $x \in E$, $\boxed{x = p(x) \Longleftrightarrow x \in F}$: $F = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. $s \in L(E)$ est une ***symétrie*** si et seulement si $s^2 = Id_E$.

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
L'unique application s de E dans E telle que, pour tout $f, g \in F \times G$, $s(f+g) = f - g$ est une symétrie, appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G. Si l'on note p le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur associé à p, alors $s = p - q = 2p - Id_E$.

Propriété réciproque. On suppose que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.
Pour toute symétrie s de E, il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Il s'agit de $F = \mathrm{Ker}(Id_E - s)$ et de $G = \mathrm{Ker}(Id_E + s)$.

9 Sous-espaces propres

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $u \in L(E)$.

Définition. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une ***valeur propre*** de u si et seulement s'il existe un vecteur x *non nul* de E tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, tout vecteur y *non nul* tel que $u(y) = \lambda y$ est appelé un ***vecteur propre*** de u associé à la valeur propre λ.
De plus, toujours lorsque λ est une valeur propre de u, $Ker(\lambda Id_E - u)$ est appelé le ***sous-espace propre*** de u associé à la valeur propre λ. Il est noté E_λ, ou E_λ^u en cas d'ambiguïté.

Remarque. Si λ est une valeur propre de u, l'ensemble des vecteurs propres de u pour la valeur propre λ est $E_\lambda \setminus \{0\}$.

Remarque. Même lorsque λ n'est pas une valeur propre de u, on note parfois
$E_\lambda = Ker(\lambda Id_E - u)$, mais dans ce cas, $E_\lambda = \{0\}$.

Définition. Soients $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Les ***éléments propres*** de M (c'est-à-dire les valeurs propres, les vecteurs propres et les sous-espaces propres) sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Propriété.
$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si $\lambda Id_E - u$ n'est pas injective.
En particulier, u est injectif si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de u.

Définition. On appelle ***spectre*** de u l'ensemble des valeurs propres de u. Il est noté $Sp(u)$.

Théorème.
La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres de u est toujours directe.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors cette famille est libre.

Exemple. Supposons que $E \neq \{0\}$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls dans E.
- Si u est une homothétie de rapport λ, où $\lambda \in \mathbb{K}$, $Sp(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda = E$.
- Si u est le projecteur sur F parallèlement à G, $Sp(u) = \{0, 1\}$, $E_1 = F$ et $E_0 = G$.
- Si u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, $Sp(u) = \{1, -1\}$, $E_1 = F$ et $E_{-1} = G$.

Propriété.
Si $v \in L(E)$ commute avec u, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Il faut savoir le démontrer.