Feuille d'exercices 23.
Corrigé de quelques exercices

Exercice 23.10 :

$\diamond$ l'application $\|.\|$ définie par l'énoncé correspond à la norme triple (aussi appelée norme subordonnée) associée aux normes $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathbb{K}^n$. D'après le cours, c'est une norme sur l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, mais nous sommes en dimension finie, donc il s'agit de $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, que l'on peut identifier à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, en identifiant la matrice M avec son application linéaire canoniquement associée.

$\diamond$ Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $[MX]_i = \sum_{j=1}^{p} M_{i,j}X_j$, donc par inégalité triangulaire,

$|[MX]_i| \leq \sum_{j=1}^{p} |M_{i,j}||X_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |M_{i,j}|\|X\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{p} |M_{i,j}| \leq S$, en posant $S = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |M_{i,j}|$.

En passant au max, on en déduit que $\|MX\|_\infty \leq S$, pour tout $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$, puis en passant au sup, on obtient que $\|M\| \leq S$.

Montrons l'inégalité inverse. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $S = \sum_{j=1}^{p} |M_{i_0,j}|$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, posons $X_j = \frac{|M_{i_0,j}|}{M_{i_0,j}}$ si $M_{i_0,j} \neq 0$ et $X_j = 1$ lorsque $M_{i_0,j} = 0$. Ainsi,

$\|X\|_\infty = 1$ et $[MX]_{i_0} = \sum_{j=1}^{p} M_{i_0,j}X_j = \sum_{j=1}^{p} |M_{i_0,j}| \in \mathbb{R}_+$,

donc $S = [MX]_{i_0} \leq \|MX\|_\infty \leq \|M\|$, car $\|X\|_\infty \leq 1$.
Ainsi, par double inégalité, on a montré que $S = \|M\|$.

Exercice 23.14 :

1°) Soit $g \in L(F, E)$.

$$\begin{aligned} g \in V &\iff [\forall x \in E \;\; f \circ g[f(x)] = 0] \\ &\iff [\forall y \in Im(f) \;\; f \circ g(y) = 0] \\ &\iff [\forall y \in Im(f) \;\; g(y) \in Ker(f)] \\ &\iff g(Im(f)) \subset Ker(f). \end{aligned}$$

2°) Soient $(b_1, \dots, b_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète en une base $b = (b_1, \dots, b_p)$ de F et $a = (a_1, \dots, a_{n-r})$ une base de $Ker(f)$, que l'on complète en une base $a = (a_1, \dots, a_n)$ de E.
D'après la première question, $g \in V$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{M}_{n-r,r}$, $B \in \mathcal{M}_{n-r,p-r}$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p-r}$ telles que la matrice de g dans les bases b et a se décompose en blocs sous la forme suivante : $Mat(g, b, a) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,r} & C \end{pmatrix}$.
On notera W l'ensemble de ces matrices.
Notons $\begin{array}{cccc} \varphi : & L(F,E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p} \\ & u & \longmapsto & Mat(u,b,a) \end{array}$. D'après le cours, φ est un isomorphisme, donc $dim(V) = dim(\varphi(V)) = dim(W)$, or
$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n-r,r} \times \mathcal{M}_{n-r,p-r} \times \mathcal{M}_{r,p-r} & \longrightarrow & W \\ (A,B,C) & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,r} & C \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme, donc
$dim(V) = dim(\mathcal{M}_{n-r,r} \times \mathcal{M}_{n-r,p-r} \times \mathcal{M}_{r,p-r}) = r(n-r) + (n-r)(p-r) + r(p-r)$.
On en déduit que $dim(V) = np - r^2$.

Exercice 23.15 :

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
◇ D'après le cours, M est équivalente à la matrice $diag(1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire qu'il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ tel que $M = Qdiag(1, 0, \dots, 0)P$.
◇ On commence par résoudre le problème posé pour la matrice réduite.
C'est facile lorsque car($\mathbb{K}$) $\neq 2$:
$diag(1, 0, \dots, 0) = D_1 + D_2$, où $D_1 = diag(2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
et $D_2 = diag(-1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$, ces deux matrices possèdant exactement p coefficients diagonaux nuls. Ainsi D_1 et D_2 sont bien deux matrices de rang p.
Voici une autre construction, valable quel que soit le corps :
En notant $(c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on note D la matrice dont les colonnes sont $D_1 = c_1 + c_p$, $D_2 = c_1, \dots, D_p = c_{p-1}$, $0 = D_{p+1} = \cdots = D_n$ et on note E la matrice dont les colonnes sont $E_1 = -c_p$, $D_2 = -c_1, \dots, D_p = -c_{p-1}$, $0 = E_{p+1} = \cdots = E_n$. On vérifie que D et E sont bien des matrices de rang p, car leurs p premières colonnes forment deux familles libres et que $D + E = diag(1, 0, \dots, 0)$.
◇ On en déduit la résolution du problème relatif à la matrice initiale.
Ainsi, $M = QD_1P + QD_2P$ est bien la somme de deux matrices de rang p.
• D'après le théorème de la base incomplète, il suffit de montrer que l'ensemble des matrices de rang p engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Or la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est constituée de matrices de rang 1, donc toute matrice est combinaison linéaire de matrices de rang 1. Mais toute matrice de rang 1 est somme de matrices de rang p, donc toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices de rang p. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 23.19 :

◇ $A^2 = 0$, donc $Im(A) \subset Ker(A)$. On en déduit que $rg(A) \leq dim(Ker(A))$, or, d'après la formule du rang, $dim(Ker(A)) = 3 - rg(A)$, donc $2rg(A) \leq 3$. Mais $rg(A) \in \mathbb{N}$, donc $rg(A) \in \{0, 1\}$. De plus, $rg(A) \neq 0$ car $A \neq 0$. Ainsi, $rg(A) = 1$ et $dim(Ker(A)) = 2$.

$\diamond$ Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

[Pour obtenir la première colonne de J, il faut choisir $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(e_1) = e_2$. Il suffit pour cela de prendre e_2 dans $Im(u)$, ce qui est possible car $Im(u) \subset Ker(u)$.]

Notons e_2 un vecteur directeur de la droite vectorielle $Im(u)$ et complétons (e_2) en une base (e_2, e_3) de $Ker(u)$.

$e_2 \in Im(u)$, donc il existe $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(e_1) = e_2$.

$e_1 \notin Ker(u)$ car $u(e_1) = e_2 \neq 0$, donc $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $mat(u, e) = J$, ce qui prouve que A et J sont semblables.

• Il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.

Notons $E^A = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/AX + XA = 0\}$ et $E^J = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/JX + XJ = 0\}$.

$\diamond$ E^A est le noyau de l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, on peut s'intéresser à sa dimension. Il en est de même pour E^J.

$\diamond$ Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$X \in E^A \iff PJP^{-1}X + XPJP^{-1} = 0 \iff JP^{-1}XP + P^{-1}XPJ = 0$,

donc (1) : $X \in E^A \iff P^{-1}XP \in E^J$.

Notons $\begin{array}{cccc} \varphi : & E^A & \longrightarrow & E^J \\ & X & \longmapsto & P^{-1}XP \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} \psi : & E^J & \longrightarrow & E^A \\ & Y & \longmapsto & PYP^{-1} \end{array}$.

φ est correctement définie car, d'après (1), $X \in E^A \Longrightarrow P^{-1}XP \in E^J$, et ψ est définie, car, toujours d'après (1), $PYP^{-1} \in E^A \Longleftarrow Y \in E^J$.

De plus, on vérifie que φ et ψ sont linéaires, que $\varphi \circ \psi = Id_{E^J}$ et que $\psi \circ \varphi = Id_{E^A}$.

On en déduit que E^A et E^J sont isomorphes, donc que $dim(E^A) = dim(E^J)$.

[On a bien ainsi ramené le problème portant initialement sur la matrice A en le même problème, mais portant maintenant sur la matrice réduite J.]

$\diamond$ Soit $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En interprétant le produit XJ comme une matrice dont les colonnes sont des combinaisons linéaires des colonnes de X, on obtient que

$XJ = \begin{pmatrix} x_{1,2} & 0 & 0 \\ x_{2,2} & 0 & 0 \\ x_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en interprétant le produit JX comme une matrice dont les lignes sont des combinaisons linéaires des lignes de X, on obtient que

$JX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X \in E^J \iff x_{1,2} = x_{3,2} = x_{1,3} = x_{2,2} + x_{1,1} = 0$.

On en déduit que $E^J = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} /(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5\}$.

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & E^J \\ (a, b, c, d, e) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme, donc $dim(E^J) = 5$.

En conclusion, on a montré que $\boxed{dim(E^A) = 5}$.

Exercice 23.20 :

1°) Lorsque $B \in G$, l'application $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & BA \end{array}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & B^{-1}A \end{array}$, donc par changement de variable, $Bp = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{A \in G} BA = \dfrac{1}{m} \sum_{A \in G} A = p$.

On en déduit que $p^2 = \Big[\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{B \in G} B\Big] p = \dfrac{1}{m} \sum_{B \in G} p = p$, donc p est bien un projecteur.

2°) D'après le cours, $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$, or l'opérateur Tr est linéaire,
donc $\mathrm{rg}(p) = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{A \in G} \mathrm{Tr}(A)$.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Im}(p) = \displaystyle\bigcap_{A \in G} Ker(A - I_n)$:

Si $X \in \displaystyle\bigcap_{A \in G} Ker(A - I_n)$, pour tout $A \in G$, $AX = X$,

donc $pX = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{A \in G} AX = X$ et $X \in \mathrm{Im}(p)$.

Réciproquement, supposons que $X \in \mathrm{Im}(p)$ et soit $A \in G$.
Alors $p(X) = X$ (car p est un projecteur), donc $AX = ApX = pX = X$ car on vu en première question que $Bp = p$ pour tout $B \in G$. Ainsi, $X \in \displaystyle\bigcap_{A \in G} Ker(A - I_n)$.

Exercice 23.21 :

1°) L'énoncé suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|A^p\| \leq M$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\|B_p\| = \dfrac{1}{p} \Big\| \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k \Big\| \leq \dfrac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \|A^k\| \leq \dfrac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} M = M$. Ainsi, la suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B_{\varphi(p)} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} B$.

2°) $B_{\varphi(p)}(I - A) = \dfrac{1}{\varphi(p)} \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} A^k \Big)(I - A) = \dfrac{1}{\varphi(p)} (I - A^{\varphi(p)})$,

donc $\|B_{\varphi(p)}(I - A)\| \leq \dfrac{1}{\varphi(p)} (\|I\| + \|A^{\varphi(p)}\|) \leq \dfrac{1}{\varphi(p)} (\|I\| + M) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $B_{\varphi(p)}(I - A) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, $B_{\varphi(p)} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} B$ et l'application $M \longmapsto M(I - A)$ est continue (par exemple parce qu'elle est linéaire en dimension finie), donc $B_{\varphi(p)}(I - A) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} B(I - A)$. D'après l'unicité de la limite, $B(I - A) = 0$.

3°) On en déduit que $B = BA$, puis par récurrence sur k, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B = BA^k$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $BB_{\varphi(p)} = \dfrac{1}{\varphi(p)} B \displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} A^k = \dfrac{1}{\varphi(p)} \sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} BA^k = B$. Mais $BB_{\varphi(p)} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} BB$, donc $B^2 = B$, ce qui montre que B est un projecteur.

4°)
◇ $B(I - A) = 0$ donc $\mathrm{Im}(I - A) \subset \mathrm{Ker}(B)$.
En adaptant la question 2, on montre également que $(I - A)B = 0$, donc $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(I - A)$.
◇ Soit $X \in Ker(I - A)$. Ainsi $AX = X$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = X$, puis, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B_{\varphi(p)} X = \dfrac{1}{\varphi(p)} \displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} A^k X = X$, or l'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ M & \longmapsto & MX \end{array}$ est continue car linéaire, donc $B_{\varphi(p)} X \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} BX$. Ceci prouve que $BX = X$, donc que $X \in Im(B)$. Ainsi, $Ker(I - A) \subset Im(B)$.
◇ Ainsi, $\mathrm{Ker}(I - A) = Im(B)$. Alors d'après la formule du rang,
$\dim(\mathrm{Ker}(B)) = n - \mathrm{rg}(B) = n - \dim(\mathrm{Ker}(I - A)) = \mathrm{rg}(I - A)$, or $\mathrm{Im}(I - A) \subset \mathrm{Ker}(B)$, donc $\mathrm{Im}(I - A) = \mathrm{Ker}(B)$.

5°) On a montré que la suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence, notée B. D'après le cours, on en déduit que $(B_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers B : démontrons tout de même ce dernier point :
Supposons que la suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers B. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \geq P$ tel que $\|B_p - B\| \geq \varepsilon$.
$\{p \in \mathbb{N}^* / \|B_p - B\| \geq \varepsilon\}$ n'est donc pas majoré. C'est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On sait alors qu'il existe une unique bijection ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.
En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|B_{\psi(p)} - B\| \geq \varepsilon$.
Cependant la suite $(B_{\psi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc elle admet une valeur d'adhérence notée C. Il existe $\psi' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $B_{\psi(\psi'(p))} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} C$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|B_{\psi(\psi'(p))} - B\| \geq \varepsilon$, donc $\|C - B\| \geq \varepsilon$, mais $(B_{\psi(\psi'(p))})$ est aussi une suite extraite de la suite (B_p), donc C est aussi une valeur d'adhérence de la suite (B_p), donc elle est égale à B. C'est impossible, ce qui prouve que $B_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} B$.

Exercice 23.22 :

1°) D'après le cours, pour un corps de caractéristique nulle, lorsque $\deg(P) \geq 1$, $\deg(D(P)) = \deg(P) - 1$ et lorsque $\deg(P) \leq 0$, $\deg(D(P)) = -\infty$.

2°) D'après la question précédente, les $\mathbb{K}_n[X]$ sont stables par D. De plus ils sont non nuls et de dimensions finies. Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, non nul et de dimension finie.
F admet au moins une base, notée $(P_i)_{0 \leq i \leq k}$. Posons $n = \max\limits_{0 \leq i \leq k} \deg(P_i)$.
Alors $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
Notons P l'un des polynômes de la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq k}$ qui est de degré n.

F étant stable par D, F contient la famille $b = (D^i(P))_{0\le i\le n}$, donc $\mathrm{Vect}(b) \subset F$, or b est une famille de polynômes de degrés étagés, donc on sait qu'elle constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$.
On a donc montré que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

3°) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et de dimension infinie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. F n'est pas inclus dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc il existe $P \in F$ tel que $\deg(P) \ge n$. Posons $k = \deg(P)$. Alors la famille $b = (D^i(P))_{0\le i\le k}$ est une base de $\mathbb{K}_k[X]$, donc pour les mêmes raisons qu'en question 2, $\mathbb{K}_k[X] = \mathrm{Vect}(b) \subset F$. En particulier, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $F = \mathbb{K}[X]$. La réciproque étant claire, $\mathbb{K}[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et de dimension infinie.

4°)

$\diamond$ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $b = \left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0\le i\le n-1}$.
b est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Pour la suite, on pose $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $D\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = \dfrac{X^{i-1}}{(i-1)!}$, donc $\mathrm{mat}(D, b) = J$.
Notons u l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $u\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = c_i$, où $c = (c_0, \dots, c_{n-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
u envoie une base sur une base, donc c'est un isomorphisme.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $uDu^{-1}(c_i) = uD\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = c_{i-1}$ et $uDu^{-1}(c_0) = 0$, donc $\mathrm{mat}(uDu^{-1}, c) = J$, ce qui prouve que uDu^{-1} est l'endomorphisme canoniquement associé à J, que l'on notera encore J.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Notons (C) la condition "F est stable par J".
Ainsi, $(C) \iff J(F) \subset F \iff uDu^{-1}(F) \subset F \iff D(u^{-1}(F)) \subset u^{-1}(F)$. Alors d'après la question 2, $(C) \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ u^{-1}(F) = \mathbb{K}_k[X]$,
or $u(\mathbb{K}_k[X]) = u\left(\mathrm{Vect}\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0\le i\le k}\right) = \mathrm{Vect}\left(u\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0\le i\le k}\right) = \mathrm{Vect}((c_i)_{0\le i\le k})$. Ainsi, on a montré que les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{K}^n$ stables par J sont exactement les $\mathrm{Vect}((c_i)_{0\le i\le k}$, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
$\diamond$ On peut retrouver ce résultat directement :
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ stable par J. Notons $p = \dim(F)$.
On sait démontrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (décomposition par blocs selon la partition de n suivante : $n = k + (n-k)$). En particulier, $J^n = 0$.
Notons $f = J|_F^F$. On vérifie alors que $f^n = 0$, donc f est un endomorphisme nilpotent sur un espace vectoriel de dimension p. On sait alors montrer que $f^p = 0$. On en déduit que $F \subset \mathrm{Ker}(J^p)$, or $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(J^p) = \mathrm{Vect}(c_0, \dots, c_{p-1})$, donc $F \subset \mathrm{Vect}(c_0, \dots, c_{p-1})$, mais ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, ce qui conclut.

Exercice 23.23 :

1°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

Notons $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la $i^{\text{ème}}$ composante de Me vaut $\sum_{j=1} m_{i,j} = 1$, donc $M \in \mathcal{E} \iff Me = e$.

Mais e est non nul, donc si $M \in \mathcal{E}$ alors 1 est une valeur propre de M.

2°) Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$, le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de MN vaut $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}$, donc les coefficients de MN sont strictement positifs.

$MNe = M(Ne) = Me = e$, donc $MN \in \mathcal{E}$.

3°) Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)$.

Il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Egalons les $i^{\text{èmes}}$ composantes dans la relation précédente : $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

D'après l'inégalité triangulaire, en tenant compte du fait que les coefficients de M sont dans $\mathbb{R}_+$, (1) : $|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} |x_j|$.

Posons $x = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x = |x_{i_0}|$.

L'inégalité (1) pour $i = i_0$ implique $|\lambda| x \leq x \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = x$, or $x > 0$ car $X \neq 0$, donc $|\lambda| \leq 1$.

4°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$. Soit $\lambda \in Sp(M)$ telle que $|\lambda| = 1$.

Il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Alors, $|x_{i_0}| = |\lambda x_{i_0}| = \Big| \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} x_j \Big| \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} |x_j| \overset{2)}{\leq} |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} = |x_{i_0}|$. On retrouve la même quantité $|x_{i_0}|$ à gauche et à droite de cette succession d'inégalités, donc toutes ces inégalités sont des égalités.

Ainsi, d'après (2), pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $|x_j| = |x_{i_0}|$, ainsi le module de x_j ne dépend pas de j.

Et d'après (1), on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, donc il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $M_{i_0,j} x_j \in \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$, donc l'argument de x_j ne dépend pas de j.

On en déduit que X est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc que $\lambda = 1$.

Ceci démontre en outre que $E_1^M = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc si l'on suppose de plus que M est diagonalisable, alors M est semblable à $D = \text{diag}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, avec $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \geq 2$, donc M^p tend lorsque p tend vers $+\infty$ vers une matrice semblable à $D = \text{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

Exercice 23.24 :

1°)
$\diamond$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \text{Ker}(u^k)$, $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$, donc la suite $(\text{Ker}(u^k))_{0 \leq k \leq p}$ est croissante.
$\diamond$ Supposons qu'il existe $q < p$ tel que $\text{Ker}(u^q) = \text{Ker}(u^{q+1})$. Alors, pour tout $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, $u^{q+k+1}(x) = 0 \iff u^k(x) \in \text{Ker}(u^{q+1}) \iff u^k(x) \in \text{Ker}(u^q) \iff u^{k+q}(x) = 0$, donc la suite $(\text{Ker}(u^k))_{k \geq q}$ est constante. En particulier, $\text{Ker}(u^q) = \text{Ker}(u^p) = E$, donc $u^q = 0$, ce qui est contraire à la définition de p. Ainsi, la suite $(\text{Ker}(u^k))_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante.
$\diamond$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons d_k la dimension de $\text{Ker}(u^k)$. Alors $(d_k)_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante, donc par récurrence, on en déduit que $d_k \geq k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$. En particulier, $p \leq d_p$, or d_p est la dimension d'un sous-espace vectoriel de E, donc $d_p \leq n$. En conclusion, $p \leq n$.

2°) On construit une base e de E adaptée à la succession d'inclusions strictes $\{0\} \subset \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(u^p) = E$, c'est-à-dire que si $(e_1, \ldots, e_{i_k})$ est une base de $\text{Ker}(u^k)$, on la complète en une base $(e_1, \ldots, e_{i_{k+1}})$ de $\text{Ker}(u^{k+1})$.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. En convenant que $i_0 = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $i_k < i \leq i_{k+1}$. Alors $e_i \in \text{Ker}(u^{k+1})$, donc $u(e_i) \in \text{Ker}(u^k) = \text{Vect}(e_j)_{1 \leq j \leq i_k}$. Ceci prouve que $\text{mat}(u, e)$ est triangulaire supérieure stricte.

3°) Si M est une matrice nilpotente, il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ telle que $\text{mat}(\tilde{M}, e)$ est triangulaire supérieure stricte, donc M est semblable à une telle matrice.
Réciproquement, supposons que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Il existe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle $\text{mat}(\tilde{M}, e)$ est triangulaire supérieure stricte. Notons $u = \tilde{M}$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $u(e_j) \in \text{Vect}(e_k)_{1 \leq k \leq j-1}$.
Par récurrence sur h, on montre que, pour tout $h \in \mathbb{N}_n$, pour tout $j \in \{1, \ldots, h\}$, $u^h(e_j) = 0$ et pour tout $j \in \{h+1, \ldots, n\}$, $u^h(e_j) \subset \text{Vect}(e_k)_{1 \leq k \leq j-h}$. En particulier, $u^n = 0$, donc M est nilpotente.

4°) Soit $k \in \mathbb{N}_{p-1}$. Posons $v = u|_{\text{Ker}(u^{k+1})}^{\text{Ker}(u^k)}$: v est bien définie car si $x \in ker(u^{k+1})$, alors $u(x) \in \text{Ker}(u^k)$.

Il existe un sous-espace vectoriel F tel que $F \oplus \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. Montrons que $v(F) \cap \mathrm{Ker}(u^{k-1}) = \{0\}$: en effet, soit $y \in v(F) \cap \mathrm{Ker}(u^{k-1})$: il existe $x \in F$ tel que $y = u(x)$. De plus, $y \in \mathrm{Ker}(u^{k-1})$, donc $0 = u^{k-1}(y) = u^k(x)$.
Ainsi, $x \in F \cap \mathrm{Ker}(u^k) = \{0\}$, donc $x = 0$, puis $y = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
On peut donc écrire $\mathrm{Ker}(u^k) \supset v(F) \oplus \mathrm{Ker}(u^{k-1})$. En passant aux dimensions, on obtient que $\dim(v(F)) + d_{k-1} \leq d_k$, donc $\dim(v(F)) \leq d_k - d_{k-1}$.
De plus, $\mathrm{Ker}(v|_F) = \mathrm{Ker}(u|_F) = \mathrm{Ker}(u) \cap F \subset \mathrm{Ker}(u^k) \cap F = \{0\}$, donc $v|_F$ est injective. On en déduit que $\dim(v(F)) = \dim(F) = d_{k+1} - d_k$. Finalement, on a montré que $d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$.