DM 53 : Corrigé

Partie 1 : Nombres de Stirling

1°) Notons $B = (P_i)_{0 \leq i \leq n}$. Supposons que B n'est pas libre. Alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ non nulle de réels telle que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i = 0$.
L'ensemble $\{i \in \{0, \ldots, n\} \ / \ \alpha_i \neq 0\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, donc elle possède un maximum que l'on notera m. Alors $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i P_i = 0$ et $\alpha_m \neq 0$, donc $P_m = -\frac{1}{\alpha_m} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i$. On en déduit que $m = \deg(P_m) \leq \max_{0 \leq i \leq m-1} \deg(\alpha_i P_i) \leq m - 1$ (même si $m = 0$), donc $m \leq m - 1$, ce qui est faux. Ainsi B est libre, or son cardinal est égal à $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, d'après le cours, donc B est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) $\diamond$ Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\deg(E_i) = i = \deg(F_i)$, donc d'après la question précédente, $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{F}_n$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$.
$\diamond$ Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\Delta(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(X + 1) - (\alpha P + Q)(X) = \alpha(P(X + 1) - P) + (Q(X + 1) - Q) = \alpha\Delta(P) + \Delta(Q)$. Ainsi, Δ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
$\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg(X + 1) = 1$, donc d'après le cours, le degré du polynôme composé $P(X + 1)$ est égal à $\deg(P) \times \deg(X + 1) = \deg(P)$.
Alors $\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X + 1)), \deg(P)) \leq \deg(P) \leq n$, donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi Δ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Elle est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
$\diamond$ Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. D'après la formule du binôme de Newton,
$\Delta_n(X^j) = (X + 1)^j - X^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i$.
Convenons par commodité de numéroter les lignes et colonnes de A_n de 0 à n.
Pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, le (i, j)-ème coefficient de A_n vaut donc $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ \binom{j}{i} & \text{si } i < j \end{cases}$.
A_n est donc une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire dont la diagonale est nulle).

3°) $\diamond$ Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. Lorsque $j = 0$, $E_0 = 1$, donc $\Delta_n(E_0) = 0$.

Supposons maintenant que $j \in \mathbb{N}_n$.

$$\begin{aligned}
\Delta_n(E_j) &= E_j(X+1) - E_j(X) = \frac{1}{j!}\Big[\prod_{k=0}^{j-1}(X+1-k) - \prod_{k=0}^{j-1}(X-k)\Big] \\
&= \frac{1}{j!}\Big[\prod_{k=-1}^{j-2}(X-k) - \prod_{k=0}^{j-1}(X-k)\Big] \\
&= \frac{1}{j!}\Big[\prod_{k=0}^{j-2}(X-k)\Big]((X+1)-(X-j+1)) \\
&= E_{j-1}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $B_n = \mathrm{mat}(\Delta_n, \mathcal{E}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

$\diamond$ Convenons que $E_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $R(k)$ l'assertion : $\forall j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Delta_n^k(E_j) = E_{j-k}$.
Lorsque $k = 0$, $D_n^0 = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc $R(0)$ est vraie.
Lorsque $k = 1$, le point précédent établit $R(1)$.
Supposons que $k \in \mathbb{N}^*$ et que $R(k)$ est vraie.
Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. Alors $\Delta_n^{k+1}(E_j) = \Delta_n^k(\Delta(E_j)) = \Delta_n^k(E_{j-k}) = E_{j-k-1}$ d'après $R(1)$. Ceci démontre $R(k+1)$, donc d'après le principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Delta_n^k(E_j) = E_{j-k}$.
En particulier, $\Delta_n^n(E_n) = E_0 = 1 \neq 0$, donc $\Delta_n^n \neq 0$ et, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Delta_n^{n+1}(E_j) = 0$, donc $\Delta_n^{n+1} = 0$. Ainsi, Δ_n est nilpotent, d'indice $n + 1$.

4°) $\diamond$ Soit $i, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq k \leq n$.
$\deg(F_k) = k$, donc il existe bien une unique famille de réels $(s(i,k))_{0 \leq i \leq k}$ telle que $F_k = \sum_{i=0}^{k} s(i,k)X^i$. De même, on a montré que $(F_i)_{0 \leq i \leq k}$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$, donc il existe une unique famille de réels $(\sigma(i,k))_{0 \leq i \leq k}$ telle que $X^k = \sum_{i=0}^{k} \sigma(i,k)F_i$.
Ainsi, les familles de réels $(s(i,k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ et $(\sigma(i,k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ sont correctement définies par l'énoncé.

$\diamond$ $\sum_{j=0}^{k+1} s(j,k+1)X^j = F_{k+1} = (X-k)F_k = (X-k)\sum_{j=0}^{k} s(j,k)X^j$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} s(j,k+1)X^j &= \sum_{j=1}^{k+1} s(j-1,k)X^j - k\sum_{j=0}^{k} s(j,k)X^j \\
&= \sum_{j=1}^{k}[s(j-1,k) - ks(j,k)]X^j + s(k,k)X^{k+1} - ks(0,k).
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de degré i, ceci démontre que $s(i,k+1) = s(i-1,k) - ks(i,k)$.

$\diamond$ $\displaystyle\sum_{j=0}^{k+1}\sigma(j,k+1)F_j = X^{k+1} = XX^k = \sum_{j=0}^{k}\sigma(j,k)XF_j$. or pour tout $j\in\{0,\dots,k\}$, $XF_j = (X-j+j)F_j = F_{j+1}+jF_j$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k+1}\sigma(j,k+1)F_j &= \sum_{j=1}^{k+1}\sigma(j-1,k)F_j + \sum_{j=0}^{k}\sigma(j,k)jF_j\\ &= \sum_{j=1}^{k}[\sigma(j-1,k)+j\sigma(j,k)]F_j + \sigma(k,k)F_{k+1}.\end{aligned}$$

La famille $(F_j)_{0\le j\le k+1}$ étant libre, ceci démontre que $\sigma(i,k+1)=\sigma(i-1,k)+i\sigma(i,k)$.

5°) Pour tout $i\in\mathbb{N}$ et pour tout ensemble E, notons $\mathcal{P}_i(E)$ l'ensemble des partitions en i parties non vides de l'ensemble E.

Soit E un ensemble fini non vide. Il admet au moins un élément que nous noterons e. Soit $i\in\mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{P}_i(E)=\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des partitions de E en i parties non vides dont l'une des parties est le singleton $\{e\}$ et ou $\mathcal{B}$ est le complémentaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}_i(E)$.

L'application $\{A_1,\dots,A_{i-1}\}\longmapsto\{A_1,\dots,A_{i-1},\{e\}\}$ est une bijection de $\mathcal{P}_{i-1}(E\setminus\{e\})$ dans $\mathcal{A}$, donc $|\mathcal{A}|=|\mathcal{P}_{i-1}(E\setminus\{e\})|$.

De plus, si $\{A_1,\dots,A_i\}\in\mathcal{P}_i(E\setminus\{e\})$, alors, pour tout $j\in\mathbb{N}_i$, en remplaçant A_j par $A_j\cup\{e\}$, on obtient un élement de $\mathcal{B}$. Ainsi, pour construire un élément de $\mathcal{B}$, on part d'un élément $\{A_1,\dots,A_i\}$ de $\mathcal{P}_i(E\setminus\{e\})$ et on choisit l'indice j de l'ensemble A_j auquel on ajoutera e. On en déduit que (1) : $|\mathcal{B}|=i|\mathcal{P}_i(E\setminus\{e\})$, puis que $|\mathcal{P}_i(E)|=|\mathcal{P}_{i-1}(E\setminus\{e\})|+i|\mathcal{P}_i(E\setminus\{e\})|$.

De plus, il est clair que $|\mathcal{P}_0(E)|=0$ lorsque E est non vide et que $|\mathcal{P}_i(\emptyset)|=0$ lorsque $i\ge 1$. On a aussi $|\mathcal{P}_0(\emptyset)|=1$, car l'ensemble vide est l'unique partition de $\emptyset$ en des parties non vides. Ceci permet déjà de montrer par récurrence sur le cardinal de E que, pour tout ensemble fini E et pour tout $i\in\mathbb{N}$, $|\mathcal{P}_i(E)|$ ne dépend que de i et du cardinal de E. On peut donc poser $p(i,k)=|\mathcal{P}_i(E)|$, où E est un ensemble quelconque de cardinal k. Alors la relation (1) devient : $p(i,k+1)=p(i-1,k)+ip(i,k)$, pour tout i,k tels que $i\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$, avec de plus : $p(0,k)=p(i,0)=0$ lorsque $k\ge 1$ et $i\ge 1$ et $p(0,0)=1$.

Il s'agit de montrer que $p(i,k)=\sigma(i,k)$ pour tout $i,k\in\mathbb{N}$ avec $0\le i\le k\le n$. Or les familles $(p(i,k))_{0\le i\le k\le n}$ et $(\sigma(i,k))_{0\le i\le k\le n}$ satisfont la même relation de récurrence et on vérifie également que

— $\sigma(0,k)=0$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, car $0=0^k=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\sigma(i,k)F_i(0)=\sigma(0,k)$;

— $\sigma(0,0)=1$, car $1=1^0=\displaystyle\sum_{i=0}^{0}\sigma(i,k)F_i(0)=\sigma(0,0)$.

Alors, on montre facilement par récurrence sur $k\in\{0,\dots,n\}$, que pour tout $i\in\{0,\dots,k\}$, $p(i,k)=\sigma(i,k)$.

Partie 2 : Sommation à l'aide de Δ

6°) Notons $v = u|_H^{\mathrm{Im}(u)}$. v est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire. De plus, toujours en tant que restriction sur H, $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u) \cap H = \{0\}$ par hypothèse. Il reste à montrer que v est surjective.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Par hypothèse, il existe $h \in H$ et $k \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $x = h + k$. Alors $y = u(x) = u(h) = v(h)$ car $h \in H$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) $\diamond$ Lorsque $n = 0$, $\Delta_0 = 0$, donc $\mathrm{Im}(\Delta_0) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(\Delta_0) = \mathbb{R}_0[X]$.
Supposons maintenant que $n \geq 1$.
$\diamond$ $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) = \Delta_n(\mathrm{Vect}(E_0, \ldots, E_n))$, donc d'après le cours,
$\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathrm{Vect}(\Delta_n(E_0), \ldots, \Delta_n(E_n))$, puis d'après la question 3,
$\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathrm{Vect}(E_0, \ldots, E_{n-1})$, donc $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
$\diamond$ Il est clair que $E_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta_n)$, or d'après la formule du rang
$n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) + \dim(\mathrm{Im}(\Delta_n) = \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) + n$, donc $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ est la droite vectorielle dirigée par E_0. Ainsi, $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathbb{R}_0[X]$.
$\diamond$ Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = V \oplus \mathbb{R}_0[X]$:
Si $P \in V \cap \mathbb{R}_0[X]$, alors P est un polynôme constant et $P(0) = 0$, donc $P = 0$.
Ainsi, $V \cap \mathbb{R}_0[X] = \{0\}$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = (P - P(0)) + P(0) \in V + \mathbb{R}_0[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X] = V + \mathbb{R}_0[X]$.
Alors d'après la question précédente, $\Delta_n|_V^{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ est un isomorphisme.

8°) Posons $P = [\Delta_5|_V^{\mathbb{R}_4[X]}]^{-1}(X^4)$, de sorte que $P \in V$ et $\Delta(P) = X^4$.
Il existe $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX$.
On sait que $\Delta(P) = X^4$, or

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= e + d(2X+1) + c(3X^2+3X+1) \\ &\quad +b(4X^3+6X^2+4X+1) \\ &\quad +a(5X^4+10X^3+10X^2+5X+1), \end{aligned}$$

donc en égalant les coefficients, on obtient les relations suivantes :
$5a = 1$, $10a + 4b = 0$, $10a + 6b + 3c = 0$, $5a + 4b + 3c + 2d = 0$ et $a + b + c + d + e = 0$.
Ainsi, $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}(3-2) = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{2}(-1+2-1) = 0$
et $e = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-6+15-10}{30} = -\frac{1}{30}$.
En conclusion, on a calculé que $P = \dfrac{X^5}{5} - \dfrac{X^4}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X}{30}$.

9°) Soit $m \in \mathbb{N}$. Avec les notations de la question précédente,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i^4 = \sum_{i=1}^{m} (P(i+1) - P(i))$. C'est une somme télescopique,
donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i^4 = P(m+1) - P(1)$, or $P(1) = a + b + c + d + e = 0$, donc

$$\sum_{i=1}^m i^4 = \frac{m+1}{30}[\quad 6(m^4+4m^3+6m^2+4m+1)$$
$$-15(m^3+3m^2+3m+1)+10(m^2+2m+1)-1].$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^m i^4 = \frac{m+1}{30}m(6m^3+9m^2+m-1) = \frac{m+1}{30}m(2m+1)(3m^2+am-1)$, où en égalant les coefficients de degré 1, $a-2=1$.

En conclusion, $\displaystyle\sum_{i=1}^m i^4 = \frac{m+1}{30}m(2m+1)(3m^2+3m-1)$.

Partie 3 : Bases duales

10°) $\diamond$ Soit $(\alpha_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $0 = \varphi_j(0) = \varphi_j\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\Big)$, donc $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_j(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$.

Ceci démontre que e est une famille libre de E. De plus elle contient n vecteurs et $\dim(E) = n$, donc e est une base de E.

$\diamond$ De même, soit $(\alpha_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $0 = 0(e_j) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i\Big)(e_j)$, donc $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$.

Ceci démontre que φ est une famille libre de E^*. De plus elle contient n vecteurs et $\dim(E^*) = \dim(L(E,\mathbb{R})) = \dim(E)\times\dim(\mathbb{R}) = n$, donc φ est une base de E^*.

11°) Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les décompositions de x et de y dans la base e s'écrivent $x = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^n y_j e_j$, où $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors $x + \alpha y = \displaystyle\sum_{j=1}^n (\alpha x_j + y_j) e_j$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$e_i^*(x+\alpha y) = \alpha x_i + y_i = \alpha e_i^*(x) + e_i^*(y)$.

Ceci prouve que e^* est une famille de n vecteurs de E^*.

De plus, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $e_i^*(e_j)$ est égale à la i-ème coordonnée dans la base e de e_j, ainsi, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Alors d'après la question précédente, e^* est une base de E^*.

12°) $\diamond$ Il est clair que u est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi_i(x) = 0$, or φ est une base de E^*, donc pour tout $\Psi \in E^*$, il existe $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $\Psi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i$, donc $\Psi(x) = 0$.

Ainsi, si $f = (f_1,\dots,f_n)$ est une base de E, en notant $(f_1^*,\dots,f_n^*)$ sa base duale, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_i^*(x) = 0$, or $f_i^*(x)$ désigne la i-ème coordonnée de x dans la base

f, donc $x = 0$. Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc que u est injective. De plus $\dim(E) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc u est un isomorphisme.
Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Si e est une base telle que $\varphi = e^*$, alors pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(e_i) = c_i$, où c_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $u(e) = c$, où c est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, si $u(e) = c$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(e_i) = c_i$, donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$. Alors, d'après la question 10, e est une base de E. De plus, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_j(e_i) = x_j$, donc $\varphi_j = e_j^*$.
On a donc montré que e est une base de E telle que $e^* = \varphi$ si et seulement si $u(e) = c$, c'est-à-dire si et seulement si $e = u^{-1}(c)$. Ceci prouve l'existence et l'unicité d'une base e de E telle que $e^* = \varphi$.
◇ Soit $x \in E$. $\varphi_i(x) = e_i^*(x)$ est égale à la i-ème coordonnée de x dans la base e, donc $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.

Soit $f \in E^*$. φ étant une base de E^*, il existe $(f_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ telle que $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_{i,j} = f_j$, donc $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \varphi_i$.

13°) D'après la question 1, $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
De plus, d'après la formule de Taylor, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i$,

donc $\frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}$ est la i-ème coordonnée de P dans la base $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$. Ceci démontre que la base duale est $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$, où pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,
$\varphi_i = \left(P \longmapsto \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}\right)$.

14°) Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est bien une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, posons $L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. On vérifie facilement que, pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $f_{x_j}(L_i) = L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi, d'après la question 10, $L = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(f_{x_i})_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$. De plus d'après la question 12, L est sa base préduale.

15°) On a montré en question 3 que, pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Delta_n^j(E_i) = E_{i-j}$ en convenant que $E_k = 0$ lorsque $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On en déduit que $\Delta_n^j(E_i)(0) = E_{i-j}(0) = \delta_{i,j}$, car lorsque $k \geq 1$, $E_k(0) = 0$.
Ainsi, si l'on pose, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Psi_j(P) = \Delta_n^j(P)(0)$, Ψ_j est une forme linéaire et, pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Psi_j(E_i) = \delta_{i,j}$. Alors, d'après les questions 10 à 12, la base duale de $\mathcal{E}_n$ est $\Psi = (\Psi_0, \ldots, \Psi_n)$.

16°) $\diamond$ Posons $P = Q(X+\alpha)$. Ainsi, pour tout $h \in \{0,\ldots,n\}$, $P(h) \in \mathbb{Z}$.
D'après la question précédente, $P = \sum_{i=0}^{n} \Psi_i(P)E_i = \sum_{i=0}^{n} \Delta_n^i(P)(0)E_i$.
Soit $k \in \{0,\ldots,n\}$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante :
pour tout $h \in \{0,\ldots,n-k\}$, $\Delta_n^k(P)(h) \in \mathbb{Z}$.
Pour $k=0$: pour tout $h \in \{0,\ldots,n\}$, $\Delta_n^0(P)(h) = P(h) \in \mathbb{Z}$, donc $R(0)$ est vraie.
Pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, supposons $R(k-1)$. Soit $h \in \{0,\ldots,n-k\}$.
$\Delta_n^k(P)(h) = \Delta_n(\Delta_n^{k-1}(P))(h) = \Delta_n^{k-1}(P)(h+1) - \Delta_n^{k-1}(P)(h) \in \mathbb{Z}$ d'après $R(k-1)$, car h et $h+1$ sont dans $\{0,\ldots,n-k+1\}$. Ceci prouve $R(k)$.
En particulier, d'après le principe de récurrence, on obtient que pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$, $\Delta_n^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$. Or on a vu que $P = \sum_{i=0}^{n} \Delta_n^i(P)(0)E_i$, donc si l'on montre que $E_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$, alors on en déduit que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, puis que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $Q(m) = P(m-\alpha) \in \mathbb{Z}$.
$\diamond$ Soit $i \in \{0,\ldots,n\}$. Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Il nous reste donc à montrer que $E_i(m) = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(m-k) \in \mathbb{Z}$.
Lorsque $0 \leq m \leq i-1$, $E_i(m) = 0$ et lorsque $m \geq i$, $E_i(m) = \frac{1}{i!}\frac{m!}{(m-i)!} = \binom{m}{i} \in \mathbb{Z}$.
Enfin, lorsque $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, posons $r = -m \in \mathbb{N}^*$.
Alors $E_i(m) = \frac{(-1)^i}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(r+k) = \frac{(-1)^i}{i!}\frac{(r+i-1)!}{(r-1)!} = (-1)^i\binom{r+i-1}{i} \in \mathbb{Z}$.

Partie 4 : Relation entre dérivée et dérivée discrète

17°) $\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons temporairement f l'application exponentielle.
Soit $m \in \mathbb{N}$. f est de classe C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral en x et 0 : $e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^m}{m!}f^{(m+1)}(t)\,dt$.
Ainsi, $e^x = \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} + J_m$ avec $J_m = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{m!}e^t\,dt$.
$|J_m| \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x-t|^m}{m!}e^{|x|}\,dt \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x|^m}{m!}e^{|x|}\,dt = \frac{|x|^{m+1}}{m!}e^{|x|} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées. D'après le principe des gendarmes, ceci démontre que
$\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ Adaptons cette preuve lorsque $f(x) = \ln(1+x)$. Soit $x \in [0,1]$.
On vérifie par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Ainsi, la formule de Taylor avec reste intégral donne, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + K_m$, où $K_m = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{m!}(-1)^m \frac{m!}{(1+t)^{m+1}}\, dt$.

Ainsi, $|K_m| = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{(1+t)^{m+1}}\, dt \leq \int_0^x (x-t)^m\, dt = \Big[-\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\Big]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, donc $0 \leq |K_m| \leq \frac{1}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x)$.

18°) $\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k > n$, $D^k(P) = P^{(k)} = 0$, donc la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}(P)$ est une somme finie. À ce titre, elle est bien définie. Ainsi e^D est correctement défini et $e^D(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(X)}{k!}$.

De plus, d'après la formule de Taylor pour les polynômes, pour tout $t, a \in \mathbb{R}$, $P(t+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!} t^k$, donc pour $t = 1$, $P(a+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}$. Il s'agit d'une égalité entre applications polynomiales, mais sur $\mathbb{R}$, les polynômes formels et les applications polynomiales sont identifiés, donc $P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(X)}{k!}$. Ceci prouve que $e^D(P) = P(X+1) = \Delta(P) + P = (\Delta + I)(P)$, donc $e^D \in L(\mathbb{R}[X])$ et $e^D = \Delta + I$.

$\diamond$ • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\Delta^k(P) = \Delta_n^k(P)$, or d'après la question 3, $\Delta_n^{n+1} = 0$, donc lorsque $k > n$, $\Delta_n^k = 0$ puis $\Delta^k(P) = 0$. Ainsi la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k(P)}{k}$ est une somme finie. À ce titre, elle est bien définie. Ainsi $\ln(\Delta + I)$ est correctement défini et $\ln(\Delta + I)(P) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k(P)}{k}$.

• Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.
$(\Delta D)(Q) = \Delta(Q') = Q'(X+1) - Q'(X) = [Q(X+1) - Q(X)]' = (D\Delta)(P)$,
donc $\Delta D = D\Delta$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\Delta^k D = D\Delta^k$.

• Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. D'après la question 15, $DE_k = \sum_{i=0}^{n} \Delta_n^i(DE_k)(0)E_i$, donc $DE_k = \sum_{i=0}^{n} D\Delta^i(E_k)(0)E_i$, or $\Delta^i(E_k) = E_{k-i}$, en convenant que $E_h = 0$ lorsque $h < 0$. Ainsi, $DE_k = \sum_{i=0}^{n} D(E_{k-i})(0)E_i = \sum_{i=0}^{k-1} D(E_{k-i})(0)E_i$.

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. $D(E_j)(X) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j-1} \prod_{\substack{0 \leq h \leq j-1 \\ h \neq k}} (X - h)$, donc $D(E_j)(0) = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{h=1}^{j-1}(-h) = \dfrac{(-1)^{j-1}}{j!}(j-1)! = \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

On en déduit que $DE_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{(-1)^{k-i-1}}{k-i} E_i = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} E_{k-j}$,

donc pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $D(E_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} \Delta^j(E_k)$, or $(E_0, \ldots, E_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $D(P) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} \Delta^j(P) = \ln(\Delta + I)(P)$.

On a prouvé que $\ln(\Delta + I) = D$.