DS 9 : Algèbres de Lie résolubles

Les calculatrices sont interdites.

— Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $L(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes sur E.
— Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1.
— Lorsque $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes. On posera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.
— On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) avec le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes sont les coefficients de la matrice X.
— Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$. De plus, si λ est une valeur propre dans $\mathbb{C}$ de M, on notera $E_\lambda(\overline{M})$ le sous-espace propre associé.

Partie I : Préliminaires

1°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
On note $L_F(E)$ l'ensemble des $u \in L(E)$ tel que $u(F) \subset F$.
Montrer que $L_F(E)$ est une sous-algèbre de $L(E)$.
Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} L_F(E) & \longrightarrow & L(F) \\ u & \longmapsto & u|_F^F \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

2°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u, v \in L(E)$ tels que $uv = vu$.
Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

3°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension p avec $p \in \mathbb{N}^*$.
On choisit sur E une base $e = (e_1, \ldots, e_p)$.
Soit $u \in L(E)$. On note M la matrice de u dans la base e.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est une valeur propre de u si et seulement si $\det(\lambda I_p - M) = 0$.
Montrer que $\lambda \longmapsto \det(\lambda I_p - M)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré p.
En déduire que tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle possède au moins une valeur propre.

4°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $u, v \in L(E)$ tels que $uv = vu$.
Montrer que u et v possèdent au moins un vecteur propre commun, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ tels que $u(x) = \lambda x$ et $v(x) = \lambda' x$.

5°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in L(E)$.
Montrer que u est trigonalisable : on pourra raisonner par récurrence sur p.

Partie II : Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X, Y]$, définie par $[X, Y] = XY - YX$.

Définition : Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X, Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$.
On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque $[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}$.

Dans toute cette partie, on fixe deux algèbres de Lie $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ telles que $[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

On fixe $X \in \mathbb{C}^n$.
On suppose que X est un vecteur propre pour toutes les matrices de $\mathcal{V}$.
On fixe également une matrice A dans $\mathcal{U}$.

6°) Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

7°) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, \ X_{k+1} = AX_k, \ \text{pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]), \ \text{pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

8°) Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \tag{1}$$

$$[M, A]\, X_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \tag{2}$$

9°) Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$.

10°) Montrer qu'on peut définir $\overline{M}|_G^G$, $\overline{A}|_G^G$ et $\overline{[M, A]}|_G^G$.

11°) Calculer la trace de $\overline{[M, A]}|_G^G$.

12°) Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}|_G^G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$?

13°) Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

14°) Établir le théorème suivant :
Soit $X \in \mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{V}$, il existe $\lambda(M) \in \mathbb{C}$ vérifiant $MX = \lambda(M)X$.
Alors, pour tout $M \in \mathcal{V}$ et pour tout $A \in \mathcal{U}$, $M(AX) = \lambda(M)(AX)$.

Partie III : Algèbres de Lie résolubles

15°) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E, où $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\text{Vect}\{u(x_1), \ldots, u(x_p)\} = u(\text{Vect}\{x_1, \ldots, x_p\})$.

Définition : Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1, \ldots,$ $\mathcal{U}_p$ telles que :

— $\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \ldots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ et,

— pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}$.

On se propose de montrer le théorème suivant :
Théorème : Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure, c'est-à-dire si et seulement si les matrices de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables.

Notations :

— Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, notons $M_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient de M.

— Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(M_{i,i+k})_{1 \le i \le n-k}$.

— Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

— Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note $\mathcal{N}_k$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont triangulaires supérieures et dont les k diagonales supérieures
$D_0(M), D_1(M), \ldots, D_{k-1}(M)$ sont nulles.
En particulier, $\mathcal{N}_0$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

— On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

— Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $F_i = \text{Vect}\{c_1, \ldots, c_i\}$.
Lorsque $i \in \mathbb{Z}$ avec $i \le 0$, on convient que $F_i = \{0\}$.

16°) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Montrer que $M \in \mathcal{N}_k$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}$.

17°) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure. Montrer que $\mathcal{T}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.
Qu'en déduit-on au sujet du théorème précédemment énoncé ?

Dans les questions 18 à 21, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

18°) Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

19°) Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \ldots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots, \overline{M_r}$.

On note dorénavant : $\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M} \ / \ M \in \mathcal{U}\}$.

20°) Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes de l'ensemble $\overline{\mathcal{U}}$.

21°) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.

On suppose maintenant que $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.
Il existe donc des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1, \ldots,$ $\mathcal{U}_p$ telles que
$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \ldots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$
et, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, notée $\mathcal{V}$, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre $\mathcal{V}$, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

22°) Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes de l'ensemble $\overline{\mathcal{U}_1} = \{\overline{M} \ / \ M \in \mathcal{U}_1\}$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres.
On note E l'espace vectoriel engendré par X et par les éléments de la forme $\overline{A_1} \ldots \overline{A_k}\, X$ où k est un entier non nul et où, pour tout $j \in \mathbb{N}_k$, $A_j \in \mathcal{U}$.

23°) Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments non nuls de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

24°) Soit $M, M' \in \mathcal{U}$. Montrer que $\overline{[M, M']}|_E^E$ est une homothétie de trace nulle.

25°) Conclure.