DM 55 : Caractérisation des comatrices.

Dans tout le problème,
n désigne un entier au moins égal à 3 et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On notera ${}^tA$ la transposée de la matrice A.
On note $c(A)$ la comatrice de A, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le (i,j)-ème coefficient est égal au (i,j)-ème cofacteur de la matrice A.
On se propose de déterminer $\{c(A) \ / \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.

Partie I : Rang d'une comatrice

1°) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $c(\lambda A)$ en fonction de λ et de $c(A)$.

2°) Si le rang de A est inférieur ou égal à $n-2$, montrer que $c(A) = 0$.

3°) Si A est de rang n, montrer que $c(A)$ est aussi de rang n.

4°) Lorsque A est de rang n, calculer $c(c(A))$ en fonction de A et de $\det(A)$.

5°) Lorsque A est de rang n, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = c(B)$.

6°) On suppose que A est de rang $n-1$.
Montrer en détails qu'on peut extraire de A une matrice inversible de taille $n-1$.
En déduire que $c(A)$ est de rang 1.

Partie II : Le polynôme caractéristique

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\chi_A(z) = \det(A - zI_n)$.

7°) Lorsque $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $P(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k A^k$.

Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

8°) Montrer que χ_A est un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de A. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à A, alors $\chi_A = \chi_B$.

9°) Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $A_0, A_1, \ldots, A_r$ sont $r+1$ matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que $\left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ \sum_{i=0}^{r} z^i A_i = 0 \right\}$ est de cardinal strictement plus grand que r.

Montrer que, pour tout $i \in \{0, \ldots, r\}$, $A_i = 0$.

10°) Montrer qu'il existe une unique famille de matrices $R_0, \ldots, R_{n-1}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, ${}^tc(A - zI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i R_i$.

11°) Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer $(A - zI_n)\ {}^t c(A - zI_n)$ en fonction de $\chi_A(z)$.
En posant $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, en déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, une expression de $\lambda_k I_n$ en fonction de A et de $R_0, \dots, R_{n-1}$.
En déduire que $\chi_A(A) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton) et que $c(A) = P({}^t A)$, où P est le polynôme défini par : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P(z) = \frac{1}{z}(\chi_A(0) - \chi_A(z))$.

12°) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$ si et seulement si 0 est la seule valeur propre de A.

Partie III : Les matrices de rang 1

13°) Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on suppose inversibles.
Montrer que $c(MN) = c(M)c(N)$.

14°) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

15°) Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $c(MN) = c(M)c(N)$.

16°) Si M est un projecteur, que peut-on dire de $c(M)$?

17°) On suppose que A est un projecteur de rang $n - 1$.
Déterminer χ_A puis montrer que $c(A) = I_n - {}^t A$.

18°) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un projecteur de rang 1,
montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = c(N)$.

19°) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on suppose diagonalisable et de rang 1.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que λM est un projecteur.
En déduire qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = c(N)$.

20°) On suppose que A est une matrice non diagonalisable de rang 1.
20.a) Montrer que $A^2 = 0$ et que A est semblable à la matrice A_1 dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de position $(1, n)$ qui est égal à 1.

20.b) On pose $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $D_1^2 - D_1$, $D_1 A_1$ et $A_1 D_1$. Que vaut le rang de D_1 ?
20.c) Montrer l'existence de $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ telle que : $D^2 - D = A$, $AD = DA = 0$ et $I_n - D$ est de rang 2. Comparer D^3 et D^2.
20.d) Montrer que $\chi_D = X^2(1 - X)^{n-2}$ et en déduire $c(D)$.
Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = c(N)$.

21°) Déterminer $\{c(A) \ / \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.