Résumé de cours :
Semaine 31, du 26 mai au 30.

Espaces euclidiens

1 Définition d'un produit scalaire

Notation. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition. $\varphi \in L_2(E)$ est définie si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) \neq 0$.

Définition. $\varphi \in L_2(E)$ est positive si et seulement si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$.

Définition. Un ***produit scalaire*** est une forme bilinéaire symétrique définie positive,
c'est-à-dire une application $\varphi\ :\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$;
- $x \neq 0 \Longrightarrow \varphi(x,x) > 0$.

Un ***espace préhilbertien réel*** est un couple (E, φ), où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et où φ est un produit scalaire sur E.

2 Exemples

◇ Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, $\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\sum_{i\in I} x_i e_i, \sum_{i\in I} y_i e_i\right) & \longmapsto & \sum_{i\in I} x_i y_i \end{array}$ est un p.s sur E.

◇ $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \end{array}$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(X,Y) = {}^tXY$.

◇ $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^tAB) \end{array}$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

◇ En posant $\varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. ◇ Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, $l^p = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \sum |u_n|^p \text{ CV}\}$.
◇ Notons l^∞ l'ensemble des suites bornées de réels.

Propriété. l^1, l^2 et l^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
De plus si (a_n) et (b_n) sont dans l^2, alors $(a_n b_n)$ est un élément de l^1.

Propriété. Pour tout $(u_n), (v_n) \in l^2$, on pose $((u_n)|(v_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$.

l^2 muni de $(.|.)$ est un espace préhilbertien.

3 Identités remarquables

Notation. E est un espace préhilbertien réel. Son produit scalaire sera noté $(.|.)$.

Définition. Pour tout $x \in E$, la norme de x est $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Formule. Pour tout $((x, y), \alpha) \in E^2 \times \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{cl} \|\alpha x\| & = |\alpha|\|x\|, \\ \|x+y\|^2 & = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y), \\ \|x-y\|^2 & = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y), \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & = 4(x|y), \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 & = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{array}}$$

La dernière formule est la ***formule du parallélogramme*** ou ***formule de la médiane***.
Les seconde, troisième et quatrième formules sont des ***formules de polarisation***.

Théorème de Pythagore : $(x|y) = 0 \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

4 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2 \;\; |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$,
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
Il faut savoir le démontrer.

Inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2 \;\; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
avec égalité ssi x et y sont positivement colinéaires, i.e $y = 0$ ou il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = ky$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. La norme associée au produit scalaire d'un espace préhilbertien est bien une norme.

5 Orthogonalité

Notation. E est un espace préhilbertien. Son produit scalaire est noté $< ., . >$.

5.1 Orthogonalité en dimension quelconque

Définition. Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux ssi $< x, y >= 0$. On note $x \perp y$.

Définition. Si $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A \quad x \perp y\}$: l'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Exemple. Si $a \in E \setminus \{0\}$, $a^\perp$ est un hyperplan.

Propriété. Soit A une partie de E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition. Soient A et B deux parties de E. On dit qu'elles sont orthogonales si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B : $A \perp B \Longleftrightarrow [\forall (a, b) \in A \times B, \;\; a \perp b]$.

Propriété. Soient A et B deux parties de E. $A \perp B \Longleftrightarrow \;\; A \subset B^\perp \Longleftrightarrow B \subset A^\perp$.

Propriété. $A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
mais en général, $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$ et $F^{\perp\perp} \neq F$.

Propriété. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Définition. $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est orthogonale si et seulement si : $\forall (i, j) \in I^2, \;\; (i \neq j \Longrightarrow x_i \perp x_j)$.
Elle est orthonormale si et seulement si : $\forall (i, j) \in I^2, \;\; < x_i, x_j >= \delta_{i,j}$.

Relation de Pythagore : Si $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E, $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$. Lorsque $n \geq 3$, la réciproque est fausse.

Propriété. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
En particulier, une famille orthonormale est toujours libre.

Propriété. Supposons que E admet une base orthonormée notée $(e_i)_{i \in I}$.
Si $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i \in I} \beta_i e_i \in E$, alors
$< x, y >= \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \alpha_i^2$ et $x = \sum_{i \in I} < e_i, x > e_i$.

Propriété. Supposons que E est muni d'une base $e = (e_i)_{i \in I}$.
Alors il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel e est une base orthonormée.

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Alors ils forment une somme directe que l'on note $E_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} E_n = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq n}} E_i$.

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
G est un ***supplémentaire orthogonal*** de F si et seulement si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F admet au plus un supplémentaire orthogonal. Il s'agit de $F^\perp$. Il est cependant possible que $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \neq E$.
Il faut savoir le démontrer.

5.2 En dimension finie

Propriété. Si E est de dimension finie, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème. On ne suppose pas que E est de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors $F^\perp$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F. De plus $F = (F^\perp)^\perp$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

Hypothèse : jusqu'à la fin du paragraphe, E est supposé euclidien de dimension $n > 0$.

Propriété. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Propriété. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim(F^\perp) = dimE - dimF$.

Propriété. Soit e une base orthonormée de E. Soient $x, y \in E$ dont les coordonnées dans la base e sont données sous forme de vecteurs colonnes notés X et Y. Alors $< x, y >= {}^tYX = {}^tXY$.

Remarque. Si e est une base orthonormée de E, pour tout $u \in L(E)$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $[\text{mat}(u, e)]_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

La fin de ce paragraphe est hors programme.

Définition. La matrice du produit scalaire dans la base e est égale à

$$\text{mat}(< ., . >, e) = (< e_i, e_j >)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété. e est orthogonale si et seulement si $\text{mat}(< ., . >, e)$ est diagonale.

e est orthonormée si et seulement si $\text{mat}(< .,. >, e) = I_n$.

Formule. Soit e une base quelconque de E. On note Ω la matrice de $< .,. >$ dans la base e. Soient x et y deux vecteurs de E, dont les coordonnées dans e sont données sous la forme des vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$< x, y >= {}^tX\Omega Y = {}^tY\Omega X = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} x_i y_j \omega_{i,j}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit φ une forme bilinéaire sur E.
La matrice de φ dans la base e est $\text{mat}(\varphi, e) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $x, y \in E$, en posant $X = \text{mat}_e(x)$ et $Y = \text{mat}_e(y)$, $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$.
φ est symétrique si et seulement si $\Omega \in S_n(\mathbb{K})$.

6 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \bigoplus F^\perp = E$. La ***projection orthogonale*** sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Dans ce chapitre, elle est notée p_F.

Remarque. Pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$.

Formule. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, muni d'une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$, $\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i}$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème de la projection orthogonale :
Soient $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, $\boxed{d(a, F) = d(a, p_F(a)).}$
Pour tout $y \in F \setminus \{p_F(a)\}$, $d(a, y) > d(a, F)$. $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2$.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de F, $\|a\|^2 \ge \sum_{i=1}^{n} < e_i, a >^2$: inégalité de Bessel.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On pose $H = a^\perp$. H est un hyperplan dont a est un vecteur **normal**. Pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2}a$ et, en notant s_H la symétrie orthogonale par rapport à H, $s_H(x) = x - 2\frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2}a$.

Propriété. On suppose que E est de dimension finie $n \ge 1$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, passant par un point A et dirigé par l'hyperplan vectoriel H : Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul de $H^\perp$, on dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Dans ce cas, pour tout $M \in E$ $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|< \overrightarrow{n}, \overrightarrow{AM} >|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.

Si $\mathcal{H}$ a pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c$ dans un repère orthonormé, pour tout $M \in E$, $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}}$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de M dans le repère.

Il faut savoir le démontrer.

7 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème. ***Orthonormalisation de Gram-Schmidt.***
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ telle que, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$,
i) $e_k \in \mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_k)$
ii) et $< e_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est définie par $e_k = \dfrac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_i, x_k > e_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une base de E.
Alors il existe une unique base orthonormée $e = (e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux étant de plus strictement positifs.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est euclidien, il admet au moins une base orthonormée.
Toute une famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Théorème. ***Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille infinie***
Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
i) $e_k \in \mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_k)$
ii) et $< e_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $e_k = \dfrac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_i, x_k > e_i$.

8 Endomorphismes d'un espace euclidien E

8.1 Endomorphismes symétriques

Définition. $u \in L(E)$ est symétrique ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, u(y) >$.

Propriété. Soient e une base **orthonormée** de E et $u \in L(E)$.
Alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{mat}(u,e)$ est symétrique.
Il faut savoir le démontrer.

Notation. $S(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
C'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Propriété. Une projection est un endomorphisme symétrique ssi c'est une projection orthogonale.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Une symétrie est un endomorphisme symétrique ssi c'est une symétrie orthogonale.

Propriété. Si $u \in S(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Théorème spectral : Si $u \in S(E)$, il existe au moins une base orthonormée de vecteurs propres de u. On dit que u est diagonalisable en base orthonormée.