MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 28 : du lundi 2 juin au vendredi 6

Algèbre linéaire, AVEC les déterminants

Liste des questions de cours

1°) Enoncer puis établir les liens entre “antisymétrique” et “alternée” pour une application p-linéaire.

2°) Lorsque e est une base de E, donner la définition de $\det_e$: on proposera deux formules et l'on montrera qu'elles sont égales.

3°) Si e est une base de E, montrer que $\det_e$ est alternée.

4°) Montrer que pour tout $f \in A_n(E)$, $f = f(e)\det_e$.

5°) Donner et justifier la définition du déterminant d'un endomorphisme.

6°) Si $f, g \in L(E)$, que peut-on dire de $\det(fg)$? Démontrez-le.

7°) Enoncer et démontrer la formule du développement de $\det(M)$ selon l'une de ses colonnes.

8°) Montrer que $M^tCof(M) = {}^tCof(M)M = \det(M)I_n$.

9°) Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ? Démontrez-le.

10°) Enoncer et démontrer les formules de Cramer.

11°) Calcul du déterminant de Vandermonde.

12°) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, montrer que le polynôme caractéristique de $u|_F^F$ divise celui de u.

1 Programmes précédents

Les programmes de colles précédents, portant sur l'algèbre linéaire, sont à réviser.

2 Les déterminants

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

2.1 Applications multilinéaires

Formes p-linéaires, formes bilinéaires.

Formes p-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.
alternée$\Longrightarrow$antisymétrique. La réciproque est vraie lorsque $car(\mathbb{K}) \neq 2$.

2.2 Les trois notions de déterminants

2.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Notation. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, avec $n > 0$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le "volume algébrique" de l'hyperparallélépipède défini par $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est nécessairement une forme n-linéaire alternée en fonction de x.

Notation. On note $A_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si e est une base de E, on pose
$\det_e(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_j(x_{\sigma(j)})$.

Si e est une base de E, pour tout $f \in A_n(E)$, $f = f(e) \det_e$.
$A_n(E)$ est la droite vectorielle dirigée par $\det_e$.

2.2.2 Déterminant d'une matrice

$\det(M) = \det({}^tM)$.

Formule de Sarrus.

2.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$. $\det(u)$ est l'unique scalaire tel que $\forall f \in A_n(E),\ \ \forall x \in E^n,\ \ f(u(x)) = (\det(u))f(x)$.

Si e est une base de E et $u \in L(E)$, $\det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_e(x_1, \dots, x_n)$.
$\det(u) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Pour toute base e de E et pour tout $u \in L(E)$, $det(u) = det(Mat(u, e))$.

2.3 Propriétés du déterminant

Modification du déterminant lors d'une opération élémentaire portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Pour tout $f, g \in L(E)$, $\det(fg) = \det(f) \times \det(g)$.

x est une base si et seulement si $\det_e(x) \neq 0$.
$u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.
$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
Groupe spécial linéaire de E : $SL(E) = \{u \in L(E)\ /\ \det(u) = 1\}$.

Le déterminant est un invariant de similitude.

2.4 Calcul des déterminants

Mineurs et cofacteurs.
Développement de $\det(M)$ selon l'une des ses lignes ou de ses colonnes.

Comatrice $Com(M)$. $M^tCom(M) = {}^tCom(M)M = \det(M)I_n$.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Formules de Cramer.

2.5 Exemples de déterminants.

Déterminant de Vandermonde.

Déterminants tridiagonaux : relation de récurrence.

Déterminants circulants : On ajoute toutes les lignes (ou colonnes).

3 Le polynôme caractéristique

Il ne s'agit que d'une introduction à la théorie de la réduction. Aucune connaissance n'est attendue des élèves concernant les polynômes annulateurs, le lemme de décomposition des noyaux, la trigonalisation.

3.1 Définitions

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

$\chi_{{}^tM} = \chi_M$,

si M est triangulaire, alors $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - M_{i,i})$,

deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (réciproque fausse).

Lorsque $u \in L(E)$, $\chi_u = \chi_{mat(u,e)}$ où e est une base de E.
Le spectre de u est l'ensemble des racines dans $\mathbb{K}$ de χ_u.

3.2 Propriétés du polynôme caractéristique

$\chi_u(X) = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u admet au moins un vecteur propre.

Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, $Tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda)\lambda$ et $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $\chi_{u|_F^F}$ divise χ_u.
$\forall \lambda \in Sp(u) \ \ 1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - u)) \leq m(\lambda)$.

u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - u))$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Espaces euclidiens