

DM 57 :

Un corrigé.

Partie 1 : Commutant d'une partie de $L(E)$

1°) Lorsque $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, convenons de noter $M_{i,j}$ le (i,j) -ième coefficient de M . Notons D la matrice de u dans la base canonique de \mathbb{K}^N .

Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_N$, $[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^N M_{i,k}D_{k,j} = M_{i,j}D_{j,j}$, car D est diagonale. De même, $[DM]_{i,j} = D_{i,i}M_{i,j} = \lambda_i M_{i,j}$, donc

$$\begin{aligned} MD = DM &\iff \forall i, j \in \mathbb{N}_N \quad \lambda_i M_{i,j} = \lambda_j M_{i,j} \\ &\iff \forall i, j \in \mathbb{N}_N, \quad (i \neq j \implies M_{i,j} = 0), \end{aligned}$$

car pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Ceci démontre que le commutant de $\{D\}$ est égal à l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. C'est donc aussi le commutant de $\{u\}$, en identifiant une matrice avec son endomorphisme canoniquement associé.

2°) Soit $u \in L(E)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \text{Id}_E)u = \lambda u = u(\lambda \text{Id}_E)$, donc $u \in \text{Com}(\mathbb{K} \text{Id}_E)$. Ainsi, $\text{Com}(\{\lambda \text{Id}_E / \lambda \in \mathbb{K}\}) = L(E)$.

Soit $u \in \text{Com}(L(E))$. Il existe une base e de E . Notons $M = \text{mat}(u, e)$. u commute avec tout endomorphisme de E , donc M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, donc avec toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$, où $i, j \in \mathbb{N}_N$.

$$\text{Soit } i, j \in \mathbb{N}_N. \text{ Soit } h, k \in \mathbb{N}_N. [E_{i,j}M]_{h,k} = \sum_{\ell=1}^N [E_{i,j}]_{h,\ell} M_{\ell,k} = \delta_{i,h} M_{j,k}$$

$$\text{et } [ME_{i,j}]_{h,k} = \sum_{\ell=1}^N M_{h,\ell} [E_{i,j}]_{\ell,k} = M_{h,i} \delta_{j,k}.$$

Ainsi, pour tout $i, j, h, k \in \mathbb{N}_N$, $\delta_{i,h} M_{j,k} = \delta_{j,k} M_{h,i}$.

Lorsque $j \neq k$ avec $h = i$, on en déduit que $M_{j,k} = 0$, donc M est diagonale.

Lorsque $j = k$ et $h = i$, on en déduit que $M_{j,j} = M_{i,i}$, donc $M = \lambda I_n$ où $\lambda = M_{1,1}$, puis $u = \lambda \text{Id}_E$. Ceci démontre que $\text{Com}(L(E)) \subset \mathbb{K} \text{Id}_E$. Réciproquement, si $u = \lambda \text{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, on a vu que u commute avec tout endomorphisme de E , donc $u \in \text{Com}(L(E))$. On a donc montré que $\text{Com}(L(E)) = \{\lambda \text{Id}_E / \lambda \in \mathbb{K}\}$.

3°) Soit $u \in \text{Com}(H')$. Soit $h \in H$. Alors $h \in H'$ et $u \in \text{Com}(H')$, donc $uh = hu$. Ceci démontre que $u \in \text{Com}(H)$. Ainsi, $\text{Com}(H') \subset \text{Com}(H)$.

4°) Soit H une partie de $L(E)$.

0 commute avec tout endomorphisme de E , donc $0 \in \text{Com}(H)$, ainsi $\text{Com}(H)$ est non vide.

Soit $u, v \in \text{Com}(H)$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $p \in H$.

On a $(\alpha u + v)p = \alpha up + vp = \alpha pu + pv = p(\alpha u + v)$, donc $\alpha u + v \in \text{Com}(H)$ et $(uv)p = u(vp) = u(pv) = (up)v = (pu)v = p(uv)$, donc $uv \in \text{Com}(H)$.

Ainsi, $\text{Com}(H)$ est bien une algèbre.

5°) Posons $B = \bigcap_{i \in I} A_i$ et montrons que c'est une algèbre.

B est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels.

Soit $u, v \in B$. Soit $i \in I$. A_i est une algèbre et $u, v \in A_i$, donc $uv \in A_i$. Ainsi, $uv \in B$. Ceci montre que B est une algèbre.

6°) $\diamond E$ est une algèbre contenant H , donc l'ensemble \mathcal{H} des algèbres contenant H est non vide. On peut donc poser $A = \bigcap_{a \in \mathcal{H}} a$. D'après la question précédente, A est une algèbre. De plus c'est une intersection de parties contenant H , donc $H \subset A$.

Soit B une algèbre contenant H . Alors $B \in \mathcal{H}$, donc $A = \bigcap_{a \in \mathcal{H}} a \subset B$.

Ainsi, A est la plus petite algèbre contenant H .

\diamond Posons $C = \text{Vect}(P)$.

Montrons que C est une algèbre : c'est un sous-espace vectoriel par définition. Soit $u, v \in C$. Il existe $(\alpha_p)_{p \in P}$ et $(\beta_p)_{p \in P}$, deux familles presque nulles de scalaires telles que $u = \sum_{p \in P} \alpha_p p$ et $v = \sum_{p \in P} \beta_p p$. Alors par distributivité dans $L(E)$, $uv = \sum_{p, q \in P} \alpha_p \beta_q pq$,

or par définition de P , pour tout $p, q \in P$, $pq \in P$, donc $uv \in \text{Vect}(P) = C$. Ceci montre que C est une algèbre.

On a clairement $H \subset P \subset C$.

Soit maintenant B une algèbre contenant H . Il reste à montrer que $C \subset B$. Ainsi, C sera la plus petite algèbre contenant H , donc on aura prouvé que $A = C = \text{Vect}(P)$.

Or B est stable par produit, donc $P \subset B$, puis B est un sous-espace vectoriel, donc $C = \text{Vect}(P) \subset B$.

7°) $\diamond H \subset A$, donc d'après la question 3, $\text{Com}(A) \subset \text{Com}(H)$.

Soit $u \in \text{Com}(H)$. Alors $H \subset \text{Com}(\{u\})$, or $\text{Com}(\{u\})$ est une algèbre,

donc $A \subset \text{Com}(\{u\})$, ce qui prouve que $u \in \text{Com}(A)$. Ainsi, $\text{Com}(H) \subset \text{Com}(A)$.

En conclusion, $\text{Com}(A) = \text{Com}(H)$.

\diamond Soit $h \in H$. h commute avec tout élément de $\text{Com}(H)$, donc $h \in \text{Com}(\text{Com}(H))$. Ainsi, $H \subset \text{Com}^2(H)$, mais $\text{Com}^2(H)$ est une algèbre, donc $A \subset \text{Com}^2(H)$.

\diamond On vient d'écrire que $H \subset \text{Com}^2(H)$, pour toute partie H de $L(E)$. C'est donc vrai en remplaçant H par $\text{Com}(H)$. Ainsi, $\text{Com}(H) \subset \text{Com}^2(\text{Com}(H)) = \text{Com}^3(H)$.

De plus, toujours en partant de $H \subset \text{Com}^2(H)$, la question 3 montre que $\text{Com}(\text{Com}^2(H)) \subset \text{Com}(H)$.

Or Com est une application de $\mathcal{P}(L(E))$ dans $\mathcal{P}(L(E))$, donc par associativité de la composition, $\text{Com}(\text{Com}^2(H)) = [\text{Com} \circ (\text{Com} \circ \text{Com})](H) = [(\text{Com} \circ \text{Com}) \circ \text{Com}](H)$. Ainsi, $\text{Com}(\text{Com}^2(H)) = \text{Com}^2(\text{Com}(H)) = \text{Com}^3(H)$, ce qui conclut.

Partie 2 : Parties irréductibles de $L(E)$

8°) Si F est stable par A , pour tout $h \in A$, $h(F) \subset F$, donc en particulier, pour tout $h \in H$, $h(F) \subset F$, donc F est stable par H .

Supposons que F est stable par H . Reprenons les notations de la question 6. Soit $u \in P$. Il existe $u_1, \dots, u_n \in H$ tel que $u = u_1 \cdots u_n$.

Soit $x \in F$. On montre facilement par récurrence descendante que,

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $u_k \cdots u_n(x) \in F$, donc $u(F) \subset F$. Ainsi, F est stable par P .

Soit maintenant $u \in A = \text{Vect}(P)$. Il existe $p_1, \dots, p_n \in P$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$. Alors, pour tout $x \in F$, $p_i(x) \in F$, or F est un sous-espace vectoriel de

E , donc $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x) \in F$. Ainsi, pour tout $u \in A$, $u(F) \subset F$, donc F est stable

par A .

Ainsi, les sous-espaces vectoriels stables par A sont exactement les sous-espaces vectoriels stables par H , or H (resp : A) est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces vectoriels stables par H (resp : A) sont $\{0\}$ et E , donc H est irréductible si et seulement si A est irréductible.

9°) Soit $u \in \text{Com}(H)$. Soit $v \in H$.

◇ Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \text{Ker}(u)$. Ainsi, $v(\text{Ker}(u)) \subset \text{Ker}(u)$, pour tout $v \in H$, donc $\text{Ker}(u)$ est stable par H .

◇ Soit $x \in \text{Im}(u)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$.

Alors $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \in \text{Im}(u)$, donc $v(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u)$, pour tout $v \in H$, donc $\text{Im}(u)$ est stable par H .

10°) Supposons que H est irréductible. D'après la question 4, $\text{Com}(H)$ est une algèbre. Soit $u \in \text{Com}(H)$ avec $u \neq 0$. D'après la question précédente, $\text{Ker}(u)$ est stable par H , mais H est irréductible, donc $\text{Ker}(u) \in \{\{0\}, E\}$, or $u \neq 0$, donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$. Ainsi, u est injective.

De même, $\text{Im}(u) \in \{\{0\}, E\}$ et $u \neq 0$, donc $\text{Im}(u) = E$. Ainsi u est inversible.

Soit $v \in H$. Alors $uv = vu$, donc $u^{-1}(uv)u^{-1} = u^{-1}(vu)u^{-1}$, puis $vu^{-1} = u^{-1}v$. Ainsi, $u^{-1} \in \text{Com}(H)$. Ceci prouve que $\text{Com}(H)$ est inversible.

11°) Soit $u \in \text{Com}(H)$. D'après l'énoncé, u admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Id_E commute avec tout endomorphisme, donc $\text{Id}_E \in \text{Com}(H)$. De plus $\text{Com}(H)$ est une algèbre, donc c'est un sous-espace vectoriel. Ainsi, $u - \lambda \text{Id}_E \in \text{Com}(H)$. Mais λ est une valeur propre de u , donc $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible. Or d'après la question précédente, $\text{Com}(H)$ est inversible, donc $u - \lambda \text{Id}_E = 0$, puis $u \in \mathbb{C} \text{Id}_E$.

Réciproquement, si $u \in \mathbb{C} \text{Id}_E$, alors u commute avec tout endomorphisme,

donc $u \in \text{Com}(H)$. On a donc montré que $\text{Com}(H) = \mathbb{C}\text{Id}_E$.

Partie 3 : Idéaux minimaux

12°)

12.a) $H \neq \{0\}$, donc il existe $h_0 \in H$ tel que $h_0 \neq 0$.

Alors, il existe $x_0 \in E$ tel que $h_0(x_0) \neq 0$.

12.b) \diamond Soit $h, h' \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors $R(\alpha h + h') = (\alpha h + h')(V) = \alpha h(V) + h'(V) = \alpha R(h) + R(h')$. Ainsi, R est bien une application linéaire de H dans E .

\diamond $R(h_0) = h_0(V) = h_0(x_0) - h_0 p(x_0)$, or $h_0 \in H$, donc par hypothèse, $h_0 p = 0$. Ainsi, $R(h_0) = h_0(x_0) \neq 0$, ce qui prouve que $R \neq 0$.

\diamond Soit $x \in \text{Im}(R)$ et $a \in A$. Il existe $h \in H$ tel que $x = R(h) = h(V)$.

Alors $a(x) = (ah)(V) = R(ah)$, ce qui a un sens car, H étant un idéal, $ah \in H$. Ainsi, $a(x) \in \text{Im}(R)$, donc $a(\text{Im}(R)) \subset \text{Im}(R)$, pour tout $a \in A$, ce qu'il fallait démontrer.

\diamond $\text{Ker}(R)$ est un sous-espace vectoriel de H .

Soit $a \in A$ et $h \in \text{Ker}(R)$. Alors $R(ah) = (ah)(V) = a(h(V)) = a(R(h))$, or $R(h) = 0$, donc $R(ah) = 0$ et $ah \in \text{Ker}(R)$. Ainsi, $\text{Ker}(R)$ est un idéal de A .

12.c) $\text{Im}(R)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par A , or A est irréductible, donc $\text{Im}(R) \in \{\{0\}, E\}$, or R est non nulle, donc $\text{Im}(R) = E$.

$\text{Ker}(R)$ est un idéal de A inclus dans H , or H est un idéal minimal, donc $\text{Ker}(R) \in \{\{0\}, H\}$, mais R est non nulle, donc $\text{Ker}(R) = \{0\}$.

En conclusion, R est un isomorphisme de H dans E .

12.d) \diamond On a posé $V = x_0 - p(x_0)$, donc $p(V) = p(x_0) - p^2(x_0) = 0$, car p est un projecteur.

Posons $F = R^{-1} : F$ est un isomorphisme de E dans H .

\diamond Soit $a \in A$.

Pour tout $h \in H$, $a(R(h)) = a(h(V)) = (ah)(V) = R(ah)$, donc $F(a(R(h))) = ah$.

Soit $X \in E$. Alors $F(X) \in H$, donc on peut utiliser l'égalité précédente en remplaçant h par $F(X)$. On obtient que $a F(X) = F(a(RF(X))) = F(a(X))$, car $RF = \text{Id}_E$.

\diamond Soit $X \in E$: Posons à nouveau $h = F(X) \in H$.

Alors $F(X)(V) = h(V) = R(h) = R(F(X)) = X$.

13°)

13.a) Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Pour tout $X \in E$, $F_j(X)(V_j) = X$, donc en particulier, $F_j(V_j)(V_j) = V_j$.

13.b) Soit $j, k \in \{1, \dots, n\}$ et $X \in E$.

Pour tout $a \in A$, $aF_j(V_j) = F_j(a(V_j))$, donc avec $a = F_k(X)$, on obtient que $F_k(X) F_j(V_j) = F_j(F_k(X)(V_j)) = F_j(\delta_{j,k}X) = \delta_{j,k}F_j(X)$.

13. c) Lorsque $k \neq j$, on en déduit que $F_k(V_k) F_j(V_j) = 0$.

Ainsi, $p^2 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} F_k(V_k) F_j(V_j) = \sum_{j=1}^n F_j(V_j)^2$.

De plus, toujours d'après le 13.b, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $F_j(V_j) F_j(V_j) = F_j(V_j)$, donc $p^2 = \sum_{j=1}^n F_j(V_j) = p$, ce qui prouve que p est un projecteur.

13.d) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ et $X \in E$. D'après la question 13.b,

$$F_j(X) p = \sum_{k=1}^n F_j(X) F_k(V_k) = \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} F_k(X) = F_j(X).$$

$$\text{De plus, } p(V_j) = \sum_{k=1}^n F_k(V_k)(V_j) = \sum_{k=1}^n \delta_{k,j} V_k = V_j.$$

14°)

14.a) Si $\text{Ker}(p) = \{0\}$, alors p est inversible, or $p^2 = p$, donc $p = \text{Id}_E$, ce qui est faux. Ainsi, $\text{Ker}(p) \neq \{0\}$ donc il existe $X_0 \in \text{Ker}(p)$ tel que $X_0 \neq 0$.

Supposons que, pour tout $a \in A$, $a(X_0) = 0$. Alors pour tout $a \in A$, $a(\mathbb{K}X_0) = \{0\} \subset \mathbb{K}X_0$, donc $\mathbb{K}X_0$ est un sous-espace vectoriel stable par A , mais A est irréductible, donc $\mathbb{K}X_0 \in \{\{0\}, E\}$, or $X_0 \neq 0$ donc $\mathbb{K}X_0 \neq \{0\}$. On en déduit que $\mathbb{K}X_0 = E$ ce qui est impossible car E est de dimension $N \geq 2$. Ainsi, il existe $a_0 \in A$ tel que $a_0(X_0) \neq 0$.

14.b) On vérifie aisément que $0 \in J$ et que J est stable par combinaison linéaire, donc J est un sous-espace vectoriel de A .

De plus, si $a \in J$ et $b \in A$, alors $ba p = b.0 = 0$, donc $ba \in J$. Ceci montre que J est un idéal de A .

De plus $(a_0 - a_0 p)p = a_0 p - a_0 p^2 = 0$, car p est un projecteur.

De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $F_j \in L(E, A)$, donc $F_j(V_j) \in A$. Mais A est un espace vectoriel, donc $p \in A$.

On en déduit que $a_0 - a_0 p \in J$, or $(a_0 - a_0 p)(X_0) = a_0(X_0) \neq 0$, donc $a_0 - a_0 p \notin J$, ce qui prouve que $J \neq \{0\}$. Ainsi, J est un idéal non nul de A .

Notons $D = \{\dim(H) / H \text{ est un idéal non nul de } A \text{ avec } H \subset J\}$. D contient $\dim(J)$, donc D est une partie non vide de \mathbb{N}^* . Notons m son minimum. Par construction de m , il existe un idéal H non nul de A inclus dans J de dimension m . Alors H est un idéal non nul minimal de A . En effet, si H' est un idéal de A inclus dans H , si H' est non nul, alors $\dim(H') \in D$, donc $\dim(H') \geq m$, mais $H' \subset H$, donc $\dim(H') \leq \dim(H) = m$. Ainsi, $H' = H$.

14.c) On a vu ci-dessus que $p \in A$. De plus, pour tout $h \in H$, $h \in J$, donc $hp = 0$. On est donc sous les hypothèses de la question 12. D'après le 12.d, il existe $F_{n+1} \in L(E, H)$ et $V_{n+1} \in E$ tels que $p(V_{n+1}) = 0$, pour tout $a \in A$ et $X \in E$, $a F_{n+1}(X) = F_{n+1}(a(X))$ et $F_{n+1}(X)(V_{n+1}) = X$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$ et $X \in E$. Il reste à vérifier que $F_j(X)(V_{n+1}) = 0$ et que $F_{n+1}(X)(V_j) = 0$.

Or d'après la question 13.d, $F_j(X) = F_j(X)p$,

$$\text{donc } F_j(X)(V_{n+1}) = F_j(X)(p(V_{n+1})) = F_j(X)(0) = 0.$$

De plus $F_{n+1} \in L(E, H)$, donc $F_{n+1}(X) \in H \subset J$, donc $F_{n+1}(X)p = 0$. Ainsi, $F_{n+1}(X)(V_j) = F_{n+1}(X)(p(V_j)) = (F_{n+1}(X)p)(V_j) = 0$.

15°) Notons R l'ensemble des $r \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, des applications linéaires F_1, \dots, F_n de E dans A et des vecteurs V_1, \dots, V_n de E tels que, pour tout $X \in E$, pour tout $a \in A$, pour tout $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $a F_j(X) = F_j(a(X))$ et $F_j(X)(V_k) = \delta_{j,k}X$, avec de plus $\text{rg}(p) = r$, où $p = \sum_{j=1}^n F_j(V_j)$.

Avec $n = 0$, l'existence des familles vides $(F_i)_{1 \leq i \leq 0}$ et $(V_i)_{1 \leq i \leq 0}$ est assurée et les propriétés souhaitées sont vraies, avec $p = 0$, donc $0 \in R$. Ainsi R est une partie non vide de \mathbb{N} , majorée par $\dim(E) = N$. R possède donc un maximum notée r_0 . Supposons que $r_0 < N$. On est alors exactement dans la situation de la question 14. Avec les notations de cette question, posons $p' = p + F_{n+1}(V_{n+1})$. D'après la question 13, en remplaçant n par $n + 1$, p' est encore un projecteur et, par définition de R , $\text{rg}(p') \in R$.

Or, on a vu en donnant la solution du 13.c que $F_{n+1}(V_{n+1})$ est un projecteur. p et p' sont aussi des projecteurs, donc d'après le cours, $\text{rg}(p') = \text{Tr}(p') = \text{Tr}(p) + \text{Tr}(F_{n+1}(V_{n+1})) = \text{rg}(p) + \text{rg}(F_{n+1}(V_{n+1})) = r_0 + \text{rg}(F_{n+1}(V_{n+1}))$. Supposons que $F_{n+1}(V_{n+1}) = 0$. Alors $0 = F_{n+1}(V_{n+1})(V_{n+1}) = V_{n+1}$, puis, pour tout $X \in E$, $X = F_{n+1}(X)(V_{n+1}) = F_{n+1}(X)(0) = 0$, donc $E = \{0\}$, ce qui est faux. Ainsi, $F_{n+1}(V_{n+1}) \neq 0$, donc $\text{rg}(F_{n+1}(V_{n+1})) \geq 1$, puis $\text{rg}(p') \geq r_0 + 1$, or $\text{rg}(p') \in R$, donc $\text{rg}(p') \leq r_0$. C'est contradictoire, donc $r_0 = N$. Ainsi, p est un projecteur de rang N , donc est inversible, or $p^2 = p$, donc $p = \text{Id}_E$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) On vérifie aisément que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, pour tout $X \in E$, $G_j(X)$ est une application linéaire de E dans E , puis que G_j est une application linéaire de E dans $L(E)$.

16.a) Soit $u \in \text{Im}(G_j)$: il existe $X \in E$ tel que $u = G_j(X)$.

Soit $a \in A$. Pour tout $Y \in E$,

$$\begin{aligned} (aG_j(X))(Y) &= a(F_j(Y)(X)) = (a F_j(Y))(X) \\ &= F_j(a(Y))(X) = G_j(X)(a(Y)) = (G_j(X) a)(Y), \end{aligned}$$

donc $aG_j(X) = G_j(X)a$, puis $ua = au$, ce qu'il fallait démontrer.

16.b) \diamond Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Soit $a \in \text{Com}(\text{Im}(F_j))$. Soit $X \in E$.

$X = F_j(X)(V_j)$, donc $a(X) = (aF_j(X))(V_j)$, or $F_j(X) \in \text{Im}(F_j)$,

donc $a(X) = (F_j(X)a)(V_j) = F_j(X)(a(V_j)) = G_j(a(V_j))(X)$.

On en déduit que $a = G_j(a(V_j)) \in \text{Im}(G_j)$. Ainsi, $\text{Com}(\text{Im}(F_j)) \subset \text{Im}(G_j)$.

\diamond Soit $j \in \mathbb{N}_n$. F_j est une application linéaire de E dans A , donc $\text{Im}(F_j) \subset A$. D'après la question 3, $\text{Com}(A) \subset \text{Com}(\text{Im}(F_j)) \subset \text{Im}(G_j)$, mais d'après 16.a, $\text{Im}(G_j) \subset \text{Com}(A)$, donc $\text{Im}(G_j) = \text{Com}(A)$.

16.c) Soit $b \in \text{Com}^2(A)$. Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $b \in \text{Com}(\text{Com}(A)) = \text{Com}(\text{Im}(G_j))$.

Soit $X \in E$. $(bF_j(V_j))(X) = b(F_j(V_j)(X)) = b(G_j(X)(V_j)) = (bG_j(X))(V_j)$, or b commute avec $G_j(X)$, donc $(bF_j(V_j))(X) = (G_j(X)b)(V_j) = G_j(X)(b(V_j)) = F_j(b(V_j))(X)$.

C'est vrai pour tout $X \in E$, donc $bF_j(V_j) = F_j(b(V_j))$.

16.d) Si $a \in A$ et $b \in \text{Com}(A)$, alors a et b commutent, donc $a \in \text{Com}^2(A)$.

Réciproquement, soit $b \in \text{Com}^2(A)$. Alors $b = b\text{Id}_E = b \sum_{j=1}^n F_j(V_j) = \sum_{j=1}^n (bF_j(V_j))$,

donc d'après la question précédente, $b = \sum_{j=1}^n F_j(b(V_j)) \in A$, car les F_j sont à valeurs dans A , lequel est un espace vectoriel.

17°) $\diamond L(E)$ est évidemment une algèbre de $L(E)$. Montrons qu'elle est irréductible. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $L(E)$.

Ainsi, pour tout $u \in L(E)$, $u(F) \subset F$.

Supposons que $F \neq \{0\}$. Il existe donc $X_0 \in F$ avec $X_0 \neq 0$. On complète X_0 en une base (X_0, \dots, X_{N-1}) de E .

Soit $Y \in E$. D'après le cours, il existe un unique $u \in L(E)$ tel que $u(X_0) = Y$ et $u(X_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

$X_0 \in F$ et $u(F) \subset F$, donc $Y = u(X_0) \in F$, pour tout $Y \in E$. Ceci démontre que $F = E$. Ainsi les seuls sous-espaces stables par $L(E)$ sont $\{0\}$ et E , ce qui prouve que $L(E)$ est une algèbre irréductible de $L(E)$.

\diamond Soit A une algèbre irréductible de $L(E)$. D'après la question précédente,

$A = \text{Com}(\text{Com}(A))$, mais d'après la question 11, $\text{Com}(A) = \{\lambda \text{Id}_E / \lambda \in \mathbb{C}\}$, donc $A = \text{Com}(\mathbb{C}\text{Id}_E)$, or tout endomorphisme de E commute avec les homothéties, donc $A = L(E)$.

18°)

18.a) D'après la question 4, $\text{Com}(A)$ est une algèbre de $L(E)$.

En particulier, c'est sous-espace vectoriel de $L(E)$, donc c'est un groupe additif.

Id_E commute avec tout endomorphisme, donc $\text{Id}_E \in \text{Com}(A)$.

De plus, $\text{Com}(A)$ étant une algèbre, elle est stable pour le produit. Elle est également stable pour la différence, donc c'est un sous-anneau de $L(E)$.

$\text{Id}_E \neq 0$, donc $\text{Com}(A) \neq \{0\}$.

Par hypothèse, $\text{Com}(A)$ est commutatif.

Enfin, d'après la question 10, $\text{Com}(A)$ est inversible, donc pour tout $u \in \text{Com}(A) \setminus \{0\}$, $u^{-1} \in \text{Com}(A)$.

En conclusion, $\text{Com}(A)$ est un corps.

18.b) \diamond Soit $u \in \text{Com}(A)$. la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq N^2}$ est une famille de vecteurs de $L(E)$ de cardinal $N^2 + 1$ et $\dim(L(E)) = N^2$, donc c'est une famille liée. Ainsi, il existe

$(\alpha_k)_{0 \leq k \leq N^2}$ une famille non nulle de réels tels que $\sum_{k=0}^{N^2} \alpha_k u^k = 0$. Ainsi, en posant

$P(X) = \sum_{k=0}^{N^2} \alpha_k X^k$, on a $P(u) = 0$ et $P \neq 0$.

$\diamond \mathbb{R}\text{Id}_E \subset \text{Com}(L(E)) \subset \text{Com}(A)$. Si $\mathbb{R}\text{Id}_E = \text{Com}(A)$, alors d'après 16.d,

$A = \text{Com}(\mathbb{R}\text{Id}_E) = L(E)$, ce qui est faux, donc il existe $u \in \text{Com}(A)$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \neq \lambda \text{Id}_E$.

D'après le point précédent, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(u) = 0$.

Écrivons la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sous

la forme $P = \prod_{i=1}^n P_i$ (les P_i sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ mais ne sont pas deux

à deux distincts). Ainsi, $0 = P(u) = \prod_{i=1}^n P_i(u)$ (en effet, on sait que l'application

$\mathbb{R}[X] \longrightarrow L(E)$
 $Q \longmapsto Q(u)$ est un morphisme d'algèbres). Cependant, $\text{Com}(A)$ est une algèbre,

donc pour tout $u \in \text{Com}(A)$, $P_i(u) \in \text{Com}(A)$. Mais $\text{Com}(A)$ est intègre, donc il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $P_i(u) = 0$. Quitte à diviser P_i par son coefficient dominant, on peut supposer que P_i est irréductible et unitaire.

Supposons que $\deg(P_i) = 1$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_i = X - \alpha$,

donc $0 = P_i(u) = u - \alpha \text{Id}_E$, ce qui est faux. Ainsi, $\deg(P_i) \geq 2$, or P_i est irréductible unitaire dans $\mathbb{R}[X]$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P_i = X^2 + aX + b$ avec

$\Delta = a^2 - 4b < 0$. Ainsi, $0 = u^2 + au + b \text{Id}_E = (u + \frac{a}{2} \text{Id}_E)^2 + (b - \frac{a^2}{4}) \text{Id}_E$.

$b - \frac{a^2}{4} > 0$, donc on peut poser $J = \frac{1}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \left(u + \frac{a}{2} \text{Id}_E \right)$.

Alors $J \in \text{Com}(A)$ et $J^2 = -\text{Id}_E$.

18.c) Soit $u \in \text{Com}(A)$. En reprenant le raisonnement précédent, on obtient qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha \text{Id}_E$, ou bien qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(u + \frac{a}{2} \text{Id}_E)^2 + (b - \frac{a^2}{4}) \text{Id}_E = 0$

avec $b - \frac{a^2}{4} > 0$. Dans le second cas, en posant $\lambda = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$, on a $(u + \frac{a}{2} \text{Id}_E)^2 - (\lambda J)^2 = 0$, or $\text{Com}(A)$ est supposé commutatif, donc $(u + \frac{a}{2} \text{Id}_E - \lambda J)(u + \frac{a}{2} \text{Id}_E + \lambda J) = 0$. Le corps $\text{Com}(A)$ est intègre, donc il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $u = -\frac{a}{2} \text{Id}_E + \varepsilon \lambda J$.

Ceci démontre que $\text{Com}(A) \subset \text{Vect}(\text{Id}_E, J)$. L'inclusion réciproque est claire.

Lorsque $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = \alpha \text{Id}_E + \beta J$. On définit ainsi une application φ de \mathbb{C} dans $\text{Com}(A)$, surjective d'après ce qui précède.

Soit $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $z' = \alpha' + i\beta' \in \mathbb{C}$.

On vérifie facilement que $\varphi(1) = \text{Id}_E$ et que $\varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z')$. De plus, $\varphi(z)\varphi(z') = (\alpha \text{Id}_E + \beta J)(\alpha' \text{Id}_E + \beta' J) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') \text{Id}_E + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)J = \varphi(zz')$, donc φ est un morphisme de corps. À ce titre, il est injectif. Ainsi, φ est un isomorphisme du corps \mathbb{C} sur le corps $\text{Com}(A)$.

18.d) \diamond Pour tout $x \in E$ et $z \in \mathbb{C}$, posons $z.x = \varphi(z)(x)$.

Lorsque $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(z) = z \text{Id}_E$, donc $z.x$ est le produit du réel z par le vecteur x , selon la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel de E , dont on dispose déjà. En particulier, pour tout $x \in E$, $1.x = x$.

De plus, on vérifie facilement que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, pour tout $x, y \in E$,

$(z + z').x = \varphi(z + z')(x) = (z.x) + (z'.x)$, $z.(x + y) = \varphi(z)(x + y) = (z.x) + (z.y)$ et $z.(z'.x) = \varphi(z)(\varphi(z')(x)) = [\varphi(z)\varphi(z')](x) = \varphi(zz')(x) = (zz').x$.

Ainsi, on a muni E d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel.

\diamond Notons $L_{\mathbb{C}}(E)$ l'ensemble des \mathbb{C} -endomorphismes de E .

Soit $a \in A$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $x \in E$: $a(z.x) = a(\varphi(z)(x)) = [a \varphi(z)](x)$,

or $\varphi(z) \in \text{Com}(A)$, donc $a(z.x) = [\varphi(z)a](x) = \varphi(z)(a(x)) = z.a(x)$. De plus a reste additive, donc $a \in L_{\mathbb{C}}(E)$. Ainsi $A \subset L_{\mathbb{C}}(E)$.

◇ Soit $a \in A$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in E$, $(z.a)(x) = z.(a(x))$, par définition de la structure de \mathbb{C} -espace vectoriel de $L_{\mathbb{C}}(E)$, donc $(z.a)(x) = \varphi(z)(a(x)) = [\varphi(z)a](x)$. Ainsi, $z.a = \varphi(z)a$.

Soit $b \in \text{Com}(A)$. Alors b commute avec a et b commute avec $\varphi(z)$ (car $\varphi(z) \in \text{Com}(A)$ et car $\text{Com}(A)$ est supposé commutatif), donc b commute avec $\varphi(z)a = z.a$. On en déduit que $z.a \in \text{Com}(\text{Com}(A)) = A$, donc A est un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $L_{\mathbb{C}}(E)$. On en déduit que A est une algèbre de $L_{\mathbb{C}}(E)$.

Soit F un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de E stable par A . C'est en particulier un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel stable par A , donc $F \in \{\{0\}, E\}$. Ainsi, A est une \mathbb{C} -algèbre irréductible de $L_{\mathbb{C}}(E)$.

◇ E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, donc il possède une \mathbb{R} -base, laquelle est clairement \mathbb{C} -génératrice. Ainsi, E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Notons $M = \dim_{\mathbb{C}}(E)$. $E \neq \{0\}$, donc $M \geq 1$.

Si $M \geq 2$, on peut utiliser la question 17 et affirmer que $A = L_{\mathbb{C}}(E)$.

Supposons maintenant que $M = 1$. $\text{Id}_E \in \text{Com}(L_{\mathbb{R}}(E)) \subset \text{Com}(\text{Com}(A)) = A$, donc $\mathbb{C}\text{Id}_E \subset A$. Or $\dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(E)) = \dim_{\mathbb{C}}(E)^2 = 1$, donc $\mathbb{C}\text{Id}_E = L_{\mathbb{C}}(E)$. On a donc encore $A = L_{\mathbb{C}}(E)$.