

DS 9 : un corrigé

Il s'agit du problème des Mines MP 2007, modifié, aménagé, remanié.

Barème :

Le barème contient un total de 53 points.

Partie I, 12 points : 2,1,3,2,4.

Partie II, 14 points : 1,1,4,1,3,1,1,1,1.

Partie III, 27 points : 1,2,5,1,3,2,3,2,2,2,4.

Partie I : Préliminaires

1°) $\diamond \text{Id}_E(F) = F \subset F$, donc $\text{Id}_E \in L_F(E)$.

Soit $u, v \in L_F(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $x \in F$. $(\alpha u + v)(x) = \alpha u(x) + v(x) \in F$, car F est un sous-espace vectoriel, donc $\alpha u + v \in L_F(E)$.

$(uv)(x) = u(v(x)) \in u(F)$, car $v(x) \in F$, donc $(uv)(x) \in F$. Ainsi, $uv \in L_F(E)$.

Ceci prouve que $L_F(E)$ est une sous-algèbre de $L(E)$.

$\diamond$ Pour tout $u \in L_F(E)$, $u(F) \subset F$, donc $u|_F^F$ est bien défini et appartient à $L(F)$.

Soit $u, v \in L_F(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $x \in F$.

$(\alpha u + v)|_F^F(x) = (\alpha u + v)(x) = \alpha u(x) + v(x) = \alpha \cdot u|_F^F(x) + v|_F^F(x) = (\alpha \cdot u|_F^F + v|_F^F)(x)$, donc $(\alpha u + v)|_F^F = \alpha \cdot u|_F^F + v|_F^F$.

De même, $(uv)|_F^F(x) = (uv)(x) = u(v(x)) = u(v|_F^F(x))$, or $v|_F^F(x) \in F$,

donc $(uv)|_F^F(x) = u|_F^F(v|_F^F(x))$, ce qui prouve que $(uv)|_F^F = (u|_F^F)(v|_F^F)$.

Enfin, $(\text{Id}_E)|_F^F = \text{Id}_F$, donc $u \mapsto u|_F^F$ est un morphisme d'algèbres de $L_F(E)$ dans $L(F)$.

2°) Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Soit $x \in E_\lambda^u = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)$.

Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda^u$.

Ainsi, le sous-espace propre E_λ^u est stable par v .

3°) $\diamond \lambda$ est valeur propre de u si et seulement si $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) \neq \{0\}$, donc si et seulement si $\lambda \text{Id}_E - u$ n'est pas injectif, c'est-à-dire bijectif, car il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Ainsi, λ est une valeur propre de u si et seulement si $\det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\lambda I_p - M) = 0$.

$\diamond$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après le cours, $\det(\lambda I_p - M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^p (\lambda \delta_{j, \sigma(j)} - M_{j, \sigma(j)})$.

Lorsque $\sigma \in \mathcal{S}_p$ avec $\sigma \neq \text{Id}_{\mathbb{N}_p}$, il existe $j \in \mathbb{N}_p$ tel que $\delta_{j,\sigma(j)} = 0$,

donc $\prod_{j=1}^p (X\delta_{j,\sigma(j)} - M_{j,\sigma(j)})$ est un polynôme de degré strictement inférieur à p .

Lorsque $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}_p}$, $\prod_{j=1}^n (X\delta_{j,\sigma(j)} - M_{j,\sigma(j)}) = \prod_{j=1}^n (X - M_{j,j})$ est de degré p ,

donc $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré p .

◇ D'après le théorème de d'Alembert, ce polynôme étant de degré $p \geq 1$, il possède au moins une racine $\lambda \in \mathbb{C}$, laquelle est donc une valeur propre de u , ce qu'il fallait démontrer.

4°) D'après la question précédente, u possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $F = E_\lambda^u$. D'après la question 2, F est stable par v . On peut donc poser $w = v|_F$. w est un endomorphisme sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non nul, donc d'après la question précédente, il possède une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$. Il existe donc $x \in F$ tel que $x \neq 0$ et $w(x) = \mu x$. Alors $v(x) = w(x) = \mu x$, de plus $x \in F = E_\lambda^u$, donc $u(x) = \lambda x$.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension n et pour tout $u \in L(E)$, u est trigonalisable.

Lorsque $n = 1$, si E est une droite vectorielle, tout endomorphisme sur E est une homothétie, donc est diagonalisable, donc est trigonalisable. Ainsi $R(1)$ est vérifiée. Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$.

◇ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $u \in L(E)$.

D'après la question 3, il existe λ une valeur propre de u , et $e_1 \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(e_1) = \lambda e_1$. Soit G un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathbb{C}e_1$ dans E .

Choisissons sur G une base $e' = (e_2, \dots, e_{n+1})$ et notons $e = (e_1, \dots, e_{n+1})$.

e constitue une base de E , car elle est adaptée à la décomposition en somme directe suivante : $E = \mathbb{C}e_1 \oplus G$.

Notons $M = \text{mat}(u, e)$. M s'écrit par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & v \\ 0_{n,1} & M' \end{pmatrix}, \text{ où } M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), v = (v_1, \dots, v_n) \text{ est une matrice ligne et où } 0_{n,1}$$

désigne la matrice nulle à n lignes et à une colonne.

◇ Notons p la projection sur G parallèlement à $\mathbb{C}e_1$ et u' l'unique endomorphisme de G dont la matrice dans e' est M' .

Soit $j \in \{2, \dots, n+1\}$. $u(e_j) = v_{j-1}e_1 + u'(e_j)$, donc $u'(e_j) = p(u(e_j))$.

Ainsi u' est l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur G .

◇ $\dim(G) = n$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à u' .

Ainsi, il existe une base $f' = (f_2, \dots, f_{n+1})$ de G telle que $T' = \text{mat}(u', f')$ est triangulaire supérieure.

Posons $f = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$. f constitue une nouvelle base de E .

Pour tout $j \in \{2, \dots, n+1\}$, il existe $w_j \in \mathbb{K}$ tel que

$u(f_j) = w_{j-1}e_1 + p(u(f_j)) = w_{j-1}e_1 + u'(f_j)$, donc, en posant

$w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $\text{mat}(u, f) = \begin{pmatrix} \lambda & w \\ 0_{n,1} & T' \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire supérieure, donc u est trigonalisable, ce qui prouve $R(n+1)$.

Partie II : Algèbres de Lie

6°) Pour toute matrice M de $\mathcal{V}$, X est un vecteur propre de M : il existe donc un scalaire $\lambda(M)$ tel que $MX = \lambda(M)X$, unique car $X \neq 0$.

Soit $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Alors

$$(\mu M_1 + M_2)X = \mu M_1(X) + M_2(X) = \mu \lambda(M_1)X + \lambda(M_2)X = (\mu \lambda(M_1) + \lambda(M_2))X.$$

D'autre part, $(\mu M_1 + M_2)X = \lambda(\mu M_1 + M_2)X$, or $X \neq 0$,

donc $\mu \lambda(M_1) + \lambda(M_2) = \lambda(\mu M_1 + M_2)$, ce qui prouve que l'application $\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bien une forme linéaire.

7°) $M \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, donc M et A sont deux éléments de $\mathcal{U}$.

Alors $[M, A] \in [\mathcal{U}] \subset \mathcal{V}$, donc $[M, A] \in \mathcal{V}$.

8°) La question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application λ_k est correctement définie de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{C}$.

Considérons l'hypothèse de récurrence $(H_i) : \forall M \in \mathcal{V}, MX_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_j$.

La propriété H_0 est trivialement vérifiée :

$$\forall M \in \mathcal{V}, MX_0 = MX = \lambda(M)X = \lambda_0(M)X_0 = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} \lambda_{-j}(M)X_j.$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que H_i soit vérifiée.

Alors pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX_{i+1} = MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i$.

En appliquant (H_i) aux deux éléments M et $[M, A]$ de $\mathcal{V}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} MX_{i+1} &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}([M, A])X_j + A \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_j \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M)X_j \\ &= \lambda_{i+1}(M)X_0 + \sum_{j=1}^i \left[\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1} \right] \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \lambda_0(M)X_{i+1}, \end{aligned}$$

donc d'après la formule de Pascal, $MX_{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M)X_j$, ce qui prouve (H_{i+1}) . Nous avons donc démontré par récurrence que (H_i) est vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}$,

ce qui donne bien l'identité (1). De plus, lorsque $M \in \mathcal{V}$, $[M, A] \in \mathcal{V}$ donc l'identité (1) appliquée à $[M, A]$ au lieu de M donne l'identité (2).

9°) L'ensemble des entiers $i \geq 0$ pour lesquels la famille $\{X_0, X_1, \dots, X_i\}$ est libre est non vide (il contient 0 car X_0 est non nul) et majoré par n car $\mathbb{C}^n$ est de dimension n . Il admet donc un plus grand élément q .

10°) D'après la relation (1), pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$, $MX_i \in G$, donc pour tout $Y \in G = \text{Vect}(X_0, \dots, X_q)$, $\overline{M}(Y) = MY \in G$. On peut donc définir $\overline{M}|_G^G \in L(G)$.

De même, la relation (2) montre qu'on peut définir $[\overline{M}, A]|_G^G$.

Par définition de q , la famille $(X_0, \dots, X_{q+1})$ est liée, donc il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1} \in \mathbb{C}$,

non tous nuls, tels que $\sum_{i=0}^{q+1} \alpha_i X_i = 0$.

Si $\alpha_{q+1} = 0$, la famille $(X_0, \dots, X_q)$ étant libre, on en déduirait que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, q+1\}$, ce qui est faux.

Ainsi, $\alpha_{q+1} \neq 0$ et $AX_q = X_{q+1} = -\frac{1}{\alpha_{q+1}} \sum_{i=0}^q \alpha_i X_i \in G$.

De plus, pour tout $i \in \{0, \dots, q-1\}$, $AX_i = X_{i+1} \in G$, donc $\overline{A}|_G^G$ est également défini.

11°) D'après la question 1, $[\overline{M}, A]|_G^G = \overline{M}|_G^G \circ \overline{A}|_G^G - \overline{A}|_G^G \circ \overline{M}|_G^G$, donc la trace de $[\overline{M}, A]|_G^G$ est nulle, par linéarité de la trace et en utilisant la propriété classique

$\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$ lorsque f et g sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel de dimension finie.

12°) Notons $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq q}$ cette matrice, en acceptant de faire varier les indices de lignes et de colonnes entre 0 et q . Ainsi, pour tout $j \in \{0, \dots, q\}$, les coefficients $(b_{i,j})_{0 \leq i \leq q}$ sont les coordonnées de $[M, A]X_j$ dans la base $(X_0, \dots, X_q)$. D'après les relations (2), cette matrice est triangulaire supérieure, de terme général $b_{i,j} = 0$ lorsque

$i > j$ et $b_{i,j} = \binom{j}{i} \lambda_{j-i+1}(M)$ lorsque $0 \leq i \leq j \leq q$.

13°) En particulier, les coefficients diagonaux de B sont tous égaux à

$\lambda_1(M) = \lambda([M, A])$. D'après le cours, $\text{Tr}(B) = \text{Tr}([\overline{M}, A]|_G^G) = 0$, donc $0 = \text{Tr}(B) = (q+1)\lambda([M, A])$, or $q+1 \neq 0$, donc $\boxed{\lambda([M, A]) = 0}$.

14°) Si $X = 0$, la propriété à établir est évidente. On peut donc supposer que $X \neq 0$. Alors X est un vecteur propre pour toutes les matrices de $\mathcal{V}$, donc on peut utiliser les questions précédentes. D'après la question 13, $0 = [M, A]X = MAX - AMX$, donc $MAX = AMX$, puis $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi, lorsque $AX \neq 0$, AX est un vecteur propre pour chaque matrice M de $\mathcal{V}$, associé à la même valeur propre que X .

Partie III : Algèbres de Lie résolubles

15°) D'après le cours, $\text{Vect}\{u(x_1), \dots, u(x_p)\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i u(x_i) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \right\}$, or u est linéaire, donc $\text{Vect}\{u(x_1), \dots, u(x_p)\} = \left\{ u\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\right) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \right\} = u(F)$,

où $F = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$.

Ainsi, $\text{Vect}\{u(x_1), \dots, u(x_p)\} = u(\text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\})$.

16°) $\diamond M \in \mathcal{N}_k$ si et seulement si les k premières colonnes de M sont nulles et si pour tout $j \in \{1, \dots, n-k\}$, la $(k+j)$ -ème colonne de M est une combinaison linéaire de $c_1, \dots, c_j$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $j \in \mathbb{N}_k$, $Mc_j = 0$ et pour tout $j \in \{k+1, \dots, n\}$, $Mc_j \in \text{Vect}(c_1, \dots, c_{j-k}) = F_{j-k}$.

Ainsi, en convenant que $F_i = \{0\}$ lorsque $i \in \mathbb{Z}$ avec $i \leq 0$, on a montré que

$M \in \mathcal{N}_k$ si et seulement si pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $Mc_j \in F_{j-k}$.

$\diamond$ Supposons d'abord que $M \in \mathcal{N}_k$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_i$,

$Mc_j \in F_{j-k} \subset F_{i-k}$, or d'après la question précédente,

$\overline{M}(F_i) = \overline{M}(\text{Vect}\{c_1, \dots, c_i\}) = \text{Vect}(\{Mc_1, \dots, Mc_i\})$, donc $\overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}$.

Réciproquement, supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $Mc_j \in \overline{M}(F_j) \subset F_{j-k}$, donc d'après l'encadré précédent $M \in \mathcal{N}_k$.

En conclusion, $M \in \mathcal{N}_k \iff [\forall i \in \mathbb{N}_n, \overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}]$.

17°) $\diamond$ Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, notons $\mathcal{M}_k = \{PMP^{-1} \mid M \in \mathcal{N}_k\} = P\mathcal{N}_kP^{-1}$.

Les $\mathcal{N}_k$ et les $\mathcal{M}_k$ sont clairement stables par combinaison linéaire et sont non vides (ils contiennent la matrice nulle), donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il est également clair que $\{0\} = \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$,

donc que $\{0\} = \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0 = \mathcal{T}$.

Il reste donc à montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $[\mathcal{M}_k] \subset \mathcal{M}_{k+1}$.

$\diamond$ Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Soit $M, M' \in \mathcal{M}_k$. Posons $N = P^{-1}MP$ et $N' = P^{-1}M'P$.

Ainsi, $N, N' \in \mathcal{N}_k$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. D'après la question précédente, $\overline{N}(F_i) \subset F_{i-k}$,

or $k \geq 1$ donc $\overline{N}(F_i) \subset F_{i-1}$. Alors $\overline{N'}\overline{N}(F_i) = \overline{N'}(\overline{N}(F_i)) \subset \overline{N'}(F_{i-1})$,

donc $\overline{N'}\overline{N}(F_i) \subset F_{i-1-k} = F_{i-(k+1)}$. D'après la question précédente, on a prouvé que

$N'N \in \mathcal{N}_{k+1}$. On en déduit que $M'M = P(N'N)P^{-1} \in \mathcal{M}_{k+1}$. De même on montre

que $MM' \in \mathcal{M}_{k+1}$, or $\mathcal{M}_{k+1}$ est un sous-espace vectoriel, donc

$[M, M'] = MM' - M'M \in \mathcal{M}_{k+1}$.

On a ainsi montré que $\{[M, M'] \mid M, M' \in \mathcal{M}_k\} \subset \mathcal{M}_{k+1}$,

donc $[\mathcal{M}_k] = \text{Vect}(\{[M, M'] \mid M, M' \in \mathcal{M}_k\}) \subset \mathcal{M}_{k+1}$.

$\diamond$ Il reste à démontrer cette propriété lorsque $k = 0$. Soit $M, M' \in \mathcal{M}_0 = \mathcal{T}$. Posons $N = P^{-1}MP$ et $N' = P^{-1}M'P$. Ainsi, N et N' sont triangulaires supérieures. D'après le cours, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, le i -ème coefficient diagonal de NN' vaut $[NN']_{i,i} = N_{i,i}N'_{i,i}$ et de même, $[N'N]_{i,i} = N'_{i,i}N_{i,i}$, donc $[NN' - N'N]_{i,i} = 0$, ce qui prouve que

$[N, N'] \in \mathcal{N}_1$, puis que $[M, M'] = P[N, N']P^{-1} \in \mathcal{M}_1$.

On en déduit alors que $[\mathcal{M}_0] \subset \mathcal{M}_1$.

En conclusion, on a montré que $\mathcal{T}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n .

◇ Ceci permet de montrer la partie "réciproque" du théorème. En effet, soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure. Pour cette matrice P , on reprend les notations précédentes, et on pose $\mathcal{U}_k = \mathcal{U} \cap \mathcal{M}_k$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. On a clairement $\{0\} = \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ (car par hypothèse, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_0$). Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Soit $A, B \in \mathcal{U}_i$. Alors $[A, B] \in [\mathcal{M}_i] \subset \mathcal{M}_{i+1}$ et $[A, B] \in \mathcal{U}$, car $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie, donc $[A, B] \in \mathcal{U}_{i+1}$. Ainsi, $[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}$. Ceci prouve que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n .

18°) Nous avons $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset \mathcal{U}_1 = \{0\}$, donc $[M, M'] = 0$ pour tous $M, M' \in \mathcal{U}$: les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux.

19°) Prouvons le résultat suivant par récurrence sur r : r endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux possèdent un vecteur propre commun.

◇ Lorsque $r = 1$, la propriété est vraie car d'après la question 3, tout endomorphisme, sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension non nulle, possède au moins une valeur propre, donc au moins un vecteur propre.

◇ Soit maintenant $r \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée au rang r et considérons une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E de dimension non nulle qui commutent deux à deux.

D'après la question 3, f_{r+1} possède au moins une valeur propre λ :

notons $F = \text{Ker}(f_{r+1} - \lambda \text{Id}_E)$ l'espace propre associé. D'après la question 2, F est stable par les f_i , pour i variant de 1 à r .

D'après la question 1, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_r$, $(f_i|_F)(f_j|_F) = (f_i f_j)|_F$, donc

$(f_i|_F)(f_j|_F) = (f_j f_i)|_F = (f_j|_F)(f_i|_F)$. De plus, $\dim(F) \geq 1$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(f_i|_F)_{1 \leq i \leq r}$: il existe un vecteur $x \in F$ qui est propre pour tous les $f_i|_F$. Ce vecteur est donc un vecteur propre pour tous les f_i , lorsque $i \in \mathbb{N}_r$, mais aussi pour f_{r+1} car $x \in \text{Ker}(f_{r+1} - \lambda \text{Id}_E)$.

Le résultat demandé est alors une conséquence directe, car $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_r$ sont des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui commutent deux à deux.

20°) $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{U}$ est aussi de dimension finie. Ainsi, il existe une base de $\mathcal{U}$, notée $(M_1, M_2, \dots, M_r)$.

D'après le résultat précédent, il existe un vecteur propre X commun aux endomorphismes $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_r$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{M}_i X = \lambda_i X$. Soit $M \in \mathcal{U}$. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tels que $M = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_r M_r$.

Alors $\overline{M}(X) = \alpha_1 \lambda_1 X + \dots + \alpha_r \lambda_r X = \lambda X$, en posant $\lambda = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i$. De plus, X est non nul, donc X est propre pour tous les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

21°) Avec les notations de la question précédente, il suffit de montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $P^{-1}M_iP$ est triangulaire supérieure.

En effet, lorsque $M = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i$ est une matrice quelconque de $\mathcal{U}$,

$P^{-1}MP = \sum_{i=1}^r \alpha_i (P^{-1}M_iP)$ sera également triangulaire supérieure. Ainsi, il suffit

d'établir la propriété $R(n)$ suivante, que l'on démontrera par récurrence sur n :

Lorsque E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel dimension n , pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $u_1, \dots, u_r \in L(E)$ qui commutent deux à deux, il existe une base e de E telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $\text{mat}(u_i, e)$ est triangulaire supérieure.

La démonstration qui suit est une adaptation de celle produite en question 5.

Lorsque $n = 1$, $R(1)$ est claire car si E est une droite vectorielle, en notant e une base de E , la matrice de tout endomorphisme de E dans la base e est de taille 1, donc est triangulaire supérieure.

Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$.

◇ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n + 1$, soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit

$u_1, \dots, u_r \in L(E)$ r endomorphismes qui commutent deux à deux.

D'après la question 19, il existe $e_1 \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $u_i(e_1) = \lambda_i e_1$.

Soit G un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathbb{C}e_1$ dans E .

Choisissons sur G une base $e' = (e_2, \dots, e_{n+1})$ et notons $e = (e_1, \dots, e_{n+1})$.

e constitue une base de E .

Soit $i \in \mathbb{N}_r$. Notons $M_i = \text{mat}(u_i, e)$. M_i s'écrit par blocs sous la forme suivante :

$M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_i \\ 0_{n,1} & M'_i \end{pmatrix}$, où $M'_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, v_i est une matrice ligne et où $0_{n,1}$ désigne la matrice nulle à n lignes et à une colonne.

◇ Notons p la projection sur G parallèlement à $\mathbb{C}e_1$ et u'_i l'unique endomorphisme de G dont la matrice dans e' est M'_i .

On a vu en question 5 que u'_i est l'endomorphisme induit par $p \circ u_i$ sur G .

◇ Soit $i, j \in \mathbb{N}_r$. u_i et u_j commutent, donc M_i et M_j commutent, or elles sont triangulaires supérieures par blocs, donc on sait que $M_i M_j$ est de la forme

$M_i M_j = \begin{pmatrix} \lambda_i \lambda_j & w \\ 0_{n,1} & M'_i M'_j \end{pmatrix}$ et que de même $M_j M_i$ est de la forme $M_j M_i = \begin{pmatrix} \lambda_j \lambda_i & w' \\ 0_{n,1} & M'_j M'_i \end{pmatrix}$.

On en déduit que M'_i et M'_j commutent, donc u'_i et u'_j commutent.

◇ $\dim(G) = n$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u'_1, \dots, u'_r$.

Ainsi, il existe une base $f' = (f_2, \dots, f_{n+1})$ de G telle que les matrices $T'_i = \text{mat}(u'_i, f')$ sont triangulaires supérieures.

Posons $f = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$. f constitue une nouvelle base de E .

Comme en question 5, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, la matrice de u_i dans la base f est de la forme $\text{mat}(u_i, f) = \begin{pmatrix} \lambda_i & w_i \\ 0_{n,1} & T'_i \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire supérieure. Ceci prouve

$R(n + 1)$.

◇ On a ainsi établi le sens direct du théorème, lorsque $p = 1$.

22°) $\mathcal{U}_1$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p - 1$, donc d'après les hypothèses de l'énoncé, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{U}_1$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.

Il existe une unique base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers e . Alors on sait que, pour tout $M \in \mathcal{U}_1$, $P^{-1}MP = \text{mat}(\overline{M}, e)$, or cette matrice est triangulaire supérieure, donc la forme de sa première colonne impose que e_1 est un vecteur propre pour $\overline{M}$, ce qu'il fallait démontrer.

23°) ◇ Notons $\mathcal{G} = \{(A_1 \cdots A_k)X \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_k, A_i \in \mathcal{U}\}$. Ainsi, $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$. En particulier, c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{U}$, il est clair que pour tout $Y \in \mathcal{G}$, $AY \in \mathcal{G}$, puis par combinaisons linéaires, que pour tout $Z \in E$, $AZ \in E$. Ainsi, E est stable par tout $A \in \mathcal{U}$.

◇ Posons $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1$. Alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des algèbres de Lie telles que $[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, donc on peut utiliser le résultat de la question 14. Or, pour tout $M \in \mathcal{V}$, il existe $\lambda(M) \in \mathbb{C}$ tel que $MX = \lambda(M)X$, donc pour tout $A \in \mathcal{U}$, $M(AX) = \lambda(M)(AX)$. En appliquant à nouveau la question 14 au vecteur AX , pour A fixé dans $\mathcal{U}$, on obtient que, pour tout $B \in \mathcal{U}$, $M(BAX) = \lambda(M)(BAX)$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que, pour tout $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{U}$, pour tout $M \in \mathcal{V}$, $M((A_1 \cdots A_k)X) = \lambda(M)((A_1 \cdots A_k)X)$. Ainsi, pour tout $Y \in \mathcal{G}$, pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MY = \lambda(M)Y$.

Soit $M \in \mathcal{V}$. l'égalité précédente signifie que $\mathcal{G} \subset \text{Ker}(\lambda(M)I_n - M)$,

donc $E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Ker}(\lambda(M)I_n - M)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } M \in \mathcal{V}, \text{ pour tout } Z \in E, MZ = \lambda(M)Z}$.

Ceci prouve que tout élément non nul de E est un vecteur propre pour tous les éléments de $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1$.

24°) ◇ Comme en question 11, E étant stable pour M et M' , on peut définir $[\overline{M}, \overline{M'}]|_E^E$ et c'est un endomorphisme de E de trace nulle.

◇ D'après l'encadré de la question précédente, pour tout $R \in \mathcal{U}_1$, $R|_E^E$ est une homothétie, de rapport $\lambda(R)$.

Or $[M, M'] \in [\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}_1$, donc $[\overline{M}, \overline{M'}]|_E^E$ est bien une homothétie.

25°) ◇ X est non nul et $X \in E$, donc $\dim(E) \geq 1$. Ainsi, toute homothétie sur E de trace nulle est identiquement nulle. La question précédente montre donc que, pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, $[\overline{M}, \overline{M'}]|_E^E = 0$, donc $M|_E^E$ et $M'|_E^E$ commutent. En passant par une base de $\{\overline{M}|_E^E \mid M \in \mathcal{U}\}$ et en utilisant la question 19, on montre que les éléments de cet ensemble possèdent un vecteur propre commun. Ainsi, il existe $e_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ pour lequel, pour tout $M \in \mathcal{U}$, il existe $\lambda(M) \in \mathbb{C}$ tel que $Me_1 = \lambda(M)e_1$.

◇ On va encore adapter la démonstration vue en questions 5 et 21 en raisonnant par récurrence sur n . On note donc $R(n)$ la propriété selon laquelle le sens direct du théorème est vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque $n = 1$, toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ sont triangulaires supérieures, donc elles sont simultanément trigonalisables, donc s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p , les matrices de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables. $R(1)$ est donc vraie.

On suppose que $n \geq 2$ et que $R(n-1)$ est vraie.

On démontre alors $R(n)$ par récurrence sur p .

Lorsque $p = 1$, c'est démontré grâce à la question 21.

On suppose donc $p > 1$ et on suppose la propriété vraie sur $\mathbb{C}^n$ pour les algèbres de Lie résolubles de longueurs $p-1$. On considère une algèbre de Lie résoluble de longueur p , notée $\mathcal{U}$. On peut alors utiliser les questions 22 à 24, ce qui donne le vecteur e_1 du point précédent.

◇ Soit G un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathbb{C}e_1$ dans $\mathbb{C}^n$. Notons p la projection sur G parallèlement à $\mathbb{C}e_1$.

Choisissons sur G une base $e' = (e_2, \dots, e_n)$ et notons $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Pour tout $M \in \mathcal{U}$, on a vu en questions 5 et 21 qu'il existe $v_M \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\text{mat}(\overline{M}, e) = \begin{pmatrix} \lambda(M) & v_M \\ 0_{n,1} & \text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') \end{pmatrix}.$$

Lorsque $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notons $u(R) = \text{mat}((p \circ \overline{R})|_G^G, e')$. D'après la question 1, u est une application linéaire.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, posons $\mathcal{U}'_i = u(\mathcal{U}_i) = \{\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') \mid M \in \mathcal{U}_i\}$. u étant linéaire, les $\mathcal{U}'_i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, on a clairement $\{0\} = \mathcal{U}'_p \subset \mathcal{U}'_{p-1} \subset \dots \subset \mathcal{U}'_1 \subset \mathcal{U}'_0$.

◇ Soit $A, B \in \mathcal{U}'_i$. Il existe $M_A, M_B \in \mathcal{U}_i$ tels que $A = u(M_A)$ et $B = u(M_B)$. Ainsi, $[A, B] = \text{mat}(w, e')$, où $w = (p \circ \overline{M_A})|_G^G \circ (p \circ \overline{M_B})|_G^G - (p \circ \overline{M_B})|_G^G \circ (p \circ \overline{M_A})|_G^G$.

Soit $x \in G$. il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{M_B}(x) = \alpha e_1 + p(\overline{M_B}(x))$, or $\overline{M_A} \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$, donc $(\overline{M_A} \overline{M_B})(x) = \alpha \lambda(M_A) e_1 + (\overline{M_A} p \overline{M_B})(x)$, puis $(p \overline{M_A} \overline{M_B})(x) = (p \overline{M_A} p \overline{M_B})(x)$.

Ceci démontre que $(p \overline{M_A} \overline{M_B})|_G^G = (p \overline{M_A} p \overline{M_B})|_G^G$.

On en déduit, à l'aide de la question 1, que $w = (p(\overline{M_A} \overline{M_B} - \overline{M_B} \overline{M_A}))|_G^G$, donc

$w = (p[\overline{M_A}, \overline{M_B}])|_G^G$, puis $[A, B] = u([M_A, M_B]) \in \mathcal{U}'_{i+1}$, car $[M_A, M_B] \in [\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}$.

Ceci démontre que $[\mathcal{U}'_i] \subset \mathcal{U}'_{i+1}$.

◇ Ainsi, $\mathcal{U}'_0$ est une algèbre de Lie résoluble de $\mathbb{C}^{n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}'_0$, $Q^{-1}MQ$ est triangulaire supérieure. D'après le cours, il existe une unique base $f' = (f_2, \dots, f_n)$ de G telle que Q est la matrice de passage de e' vers f' . Posons $f = (e_1, f_2, \dots, f_n)$, c'est une base de $\mathbb{C}^n$.

Soit $M \in \mathcal{U}$. Par construction, $\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') \in \mathcal{U}'_0$, or par formule de changement de bases, $\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, f') = Q^{-1} \text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') Q$, donc $\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, f')$ est triangulaire supérieure. Or $\text{mat}(\overline{M}, f)$ est de la forme

$$\text{mat}(\overline{M}, f) = \begin{pmatrix} \lambda(M) & w_M \\ 0_{n,1} & \text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, f') \end{pmatrix}, \text{ donc elle est triangulaire supérieure. Ainsi,}$$

en notant P la matrice de passage de e vers f , on a montré que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure. Ceci prouve $R(n)$, ce qui conclut.