Feuille d'exercices 25.
Espaces euclidiens

Exercice 25.1 : (niveau 1)
Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

Exercice 25.2 : (niveau 1)
On pose $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que M est une projection orthogonale sur un espace vectoriel à déterminer.

Exercice 25.3 : (niveau 1)
Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E.
Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

Exercice 25.4 : (niveau 1)
Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Quelle transformation de $\mathbb{R}^3$ représente A ?

Exercice 25.5 : (niveau 1)
Soit E un espace euclidien. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On suppose que f est un endomorphisme de E tel que pour tout $u, v \in E$,
$< u, v >= 0 \Longrightarrow < f(u), f(v) >= 0$.
Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$.

1°) Montrer que $e_i - e_j$ et $e_i + e_j$ sont orthogonaux.

2°) Montrer que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

3°) Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \lambda\|u\|$.

Exercice 25.6 : (niveau 1)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On note φ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

1°) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2°) Soit A l'ensemble des fonctions positives de E. Montrer que $A^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 25.7 : (niveau 2)
Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $rg(A) = rg({}^tAA)$.

Exercice 25.8 : (niveau 2)
On note E l'espace des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ définie sur $E \times E$ par

$$\forall (f,g) \in E^2 \ \ , \phi(f,g) = \int_{-1}^{1} |x| f(x) g(x) dx.$$

1°) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

2°) On pose $e_1 \ : \ x \longmapsto 1$, $e_2 \ : \ x \longmapsto \cos(\pi x)$ et $e_3 \ : \ x \longmapsto \sin(\pi x)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre ? orthonormale ? Orthonormaliser cette famille selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 25.9 : (niveau 2)
Soient E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes symétriques sur E, dont les spectres sont notés $Sp(f)$ et $Sp(g)$.

1°) Si x est un vecteur unitaire de E, montrer que $< x, f(x) > \geq \min(Sp(f))$.

2°) Montrer que $\min(Sp(f+g)) \geq \min(Sp(f)) + \min(Sp(g))$.

Exercice 25.10 : (niveau 2)

1°) Montrer que $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer $\displaystyle \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln x - ax - b)^2 dx$.

Exercice 25.11 : (niveau 2)
Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice orthogonale d'ordre n.

1°) Montrer que $n \leq \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{i,j}|$.

2°) En utilisant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1, montrer que $|\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}| \leq n$.

Exercice 25.12 : (niveau 2)
Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in L(E)$ tel que $M = mat(f, B) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que f est une rotation vectorielle si et seulement si $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ac = 0$.

2°) Montrer que cette condition est équivalente à : il existe $p \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont solutions de $x^3 - x^2 + p = 0$.

3°) On suppose que f est une rotation et que $b = c \neq 0$.
Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 25.13 : (niveau 2)

1°) Si A est une matrice antisymétrique réelle, montrer que les valeurs propres de A sont de la forme ix avec x réel.

2°) Montrer que l'application $\varphi : A \longmapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est une bijection de l'espace $A_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles antisymétriques de taille n sur l'espace Z des éléments de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 et qui n'admettent pas -1 pour valeur propre.

Exercice 25.14 : (niveau 2)
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a_0, \ldots, a_n$ $n + 1$ réels deux à deux distincts.

Pour P, Q dans E, on definit : $(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1°) Montrer que c'est un produit scalaire.

2°) Construire une base orthonormée de E.

3°) Calculer la distance de Q à $H = \{P \in E / \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.

Exercice 25.15 : (niveau 2)
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Montrer qu'il existe une matrice $R(A)$ symétrique, dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et telle que $R(A)^2 = A$.

2°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier les suites vérifiant la relation de récurrence
$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{\lambda}{u_n})$, avec $u_0 > 0$.

3°) On considère la suite matricielle définie par les relations suivantes : $X_0 = I_p$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1})$. Montrer que cette suite est définie correctement et qu'elle converge vers $R(A)$.

Exercice 25.16 : (niveau 2)
Soient n et m deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq n$.
Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{\|AX - B\|^2 / X \in \mathbb{R}^n\}$.

1°) Montrer que E possède un minimum.

2°) On note (S) le système linéaire $AX = B$ et on appelle pseudo-solution de (S) tout élément Y de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|AY - B\|^2 = \min(E)$.
Lorsque (S) admet des solutions, quelles sont les pseudo-solutions de (S) ?

3°) On note (S') le système linéaire ${}^tAAX =^t AB$.
Démontrer que Y est pseudo-solution de (S) si et seulement si Y est une solution de (S').

4°) a) Démontrer que $rg(A) = rg({}^tAA)$.
b) Déterminer alors une condition nécessaire et suffisante pour que (S) admette une et une seule pseudo-solution.

5°) Déterminer les pseudo-solutions du système $\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma & = 1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma & = 1 \\ \alpha + \gamma & = 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma & = 0 \end{cases}$.

Exercice 25.17 : (niveau 2)
E désigne l'ensemble des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$.

1°) Montrer que E muni de $< ., . >$ est un espace préhilbertien.

2°) On note $F = \{f \in E / f_{/[0,1]} = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

3°) Déterminer $F + F^\perp$.

Exercice 25.18 : (niveau 3)
Soit E un espace euclidien et $p \in L(E)$.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p$ et pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 25.19 : (niveau 3)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels que l'on suppose symétrique et à valeurs propres positives.

$$\text{Montrer que } Tr(A) \geq n \sqrt[n]{det(A)}.$$

2°) Montrer ce même résultat si l'on suppose maintenant que $A = A_1 A_2$ où A_1 et A_2 sont deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, que l'on suppose symétriques et à valeurs propres positives.

Exercice 25.20 : (niveau 3)
Matrices de Householder et décomposition QR
On fixe $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
Pour $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vu comme un vecteur colonne, on note $H(v) = I_n - \dfrac{2}{\|v\|_2^2} v^t v$.

1°) Interpréter géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $H(v)$.

2°) Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(a_2, \ldots, a_n) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $H(v)(a)$ a toutes ses composantes nulles sauf la première, qui est dans $\mathbb{R}_+^*$.

3°) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que $A = QR$.
Lorsque A est inversible, montrer que le couple (Q, R) vérifiant les propriétés précédentes est unique.

Exercice 25.21 : (niveau 3)
a et b sont deux réels tels que $a < b$.
f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
Posons, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$< P, Q >= \int_a^b f(t)P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°) Montrer qu'il existe une unique famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{c} deg(P_n) = n \\ \text{et } < P_n, X^n >> 0. \end{array} \right.$$

3°) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P_n(\alpha) = 0$.
Montrer qu'il existe un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et irréductible de degré 2 et un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $P_n = TP$.
En déduire que toutes les racines de P_n sont réelles.
b) Montrer que toutes les racines de P_n sont simples et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]a, b[$.

4°) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que
$aP_{n+2} + XP_{n+1} + bP_{n+1} + cP_n = 0$.

Exercices supplémentaires

Exercice 25.22 : (niveau 1)
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $Oxyz$.
Soit P le plan d'équation $x+2y+z=0$ et D la droite d'équations $\begin{cases} 0 & = 3x-y+z \\ 0 & = x+y-z \end{cases}$.
Déterminer l'image de D par la réflexion selon le plan P.

Exercice 25.23 : (niveau 1)
On travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\phi(A,B) = Tr({}^tAB)$ ainsi que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \big| (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1°) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

2°) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3°) Exprimer une base de $F^\perp$.

Exercice 25.24 : (niveau 1)
Soit E un espace euclidien orienté et soit $x = (x_1, ..., x_n)$ une base de E.
Notons $e = (e_1, ..., e_n)$ la base déduite de x par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrez que si x est directe, e est directe.

Exercice 25.25 : (niveau 1)
Soit (i,j,k) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminez la matrice de la rotation r vérifiant $r(i) = -j$ et $r(u) = u$ où $u = i - j + k$. Précisez son axe et son angle.

Exercice 25.26 : (niveau 1)
Nature géométrique de l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, canoniquement associé à la matrice
$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.27 : (niveau 1)
On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on note $e = (e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sa base canonique. Posons $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y+z-t = 0\}$.
Donner la matrice dans la base e de la projection orthogonale sur F.

Exercice 25.28 : (niveau 1)
$x_1, ..., x_n$ sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Notons $A = (x_i x_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$.

1°) Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale que l'on précisera.

2°) Montrer que $2A - I_n$ est une matrice orthogonale.

Exercice 25.29 : (niveau 1)
Soit $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ et $c_1, \dots, c_n$ 3n réels strictement positifs.
Montrer que $(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k)$.

Exercice 25.30 : (niveau 1)
Soit E un espace euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ un système de n vecteurs de E, unitaires et vérifiant : $\forall x \in E \ \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.
Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E et que $dim(E) = n$.

Exercice 25.31 : (niveau 1)
Soient E un espace préhilbertien réel et $x \ : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x(t)\| = 1$.
Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ et $x'(t)$ sont orthogonaux.

Exercice 25.32 : (niveau 1)
E est un espace préhilbertien réel, d et δ sont deux réels tels que $0 < \delta \leq d$, et A est une partie convexe et non vide de E.
On suppose que A est incluse dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $d + \delta$ et que son intersection avec la boule fermée de centre 0 et de rayon d est vide.
Montrer que $\sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$ est inférieur ou égal à $2\sqrt{3\delta d}$.

Exercice 25.33 : (niveau 1)
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1°) a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.
b) Donner un exemple d'espace vectoriel normé E et un choix de vecteurs non nuls x et y dans E tels que l'inégalité précédente est une égalité.

2°) On suppose maintenant que E est un espace préhilbertien muni de sa norme euclidienne ou hermitienne.
a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, montrer que $\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$
b) L'inégalité précédente est-elle encore valable si l'on remplace $\sqrt{2}$ par un réel plus petit ?

Exercice 25.34 : (niveau 1)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
La norme d'un vecteur x de E sera notée $\|x\|$.
On suppose que la norme de E vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E^2 \ \ \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On souhaite montrer que la norme de E est une norme euclidienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire f sur E tel que, pour tout $x \in E$,
$\|x\| = \sqrt{f(x, x)}$. On aura ainsi prouvé qu'une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel vérifie l'identité du parallèlogramme si et seulement si c'est une norme euclidienne.

1°) Notons $\begin{array}{cccc} f: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \end{array}$.

◇ Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $f(x+y,z) + f(x-y,z) = 2f(x,z)$.

◇ En déduire que, pour tout $(x,z) \in E^2$, $f(2x,z) = 2f(x,z)$.

2°) Montrer que, pour tout $(u,v,z) \in E^3$, $f(u,z) + f(v,z) = f(u+v,z)$.

3°) Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 25.35 : (niveau 2)

On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. Lorsque $P, Q \in E$, avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, on pose $< P, Q >= \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$.

On définit $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$.

1°) Montrer que $< ., . >$ définit un produit scalaire sur E et trouver une base orthonormée de E.

2°) On introduit la famille $B' = (e_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, définie par
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ e_i = X^i - X^{i-1}$.

a) Montrer que B' est une base de H et calculer pour tout (i,j) chacun des $< e_i, e_j >$.

b) Trouver une base orthonormée de H à partir de B' en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 25.36 : (niveau 2)

E désigne un espace euclidien et p est un projecteur de E.

1°) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

2°) Si p et q sont deux projecteurs orthogonaux, montrer qu'ils commutent si et seulement si $p \circ q$ est un projecteur.

Exercice 25.37 : (niveau 2)

$A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices antisymétriques et celui des matrices symétriques réelles. On introduit le produit scalaire tel que pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $< M|N >= tr({}^tMN)$.

1°) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Soit la matrice M où pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $M_{i,j} = i$. Déterminer la distance de M à $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 25.38 : (niveau 2)

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E
tel que $E = F + F^{\perp}$. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 25.39 : (niveau 2)

Soit A un ensemble fini de cardinal n et R une relation d'équivalence sur A. On note k le nombre de classes d'équivalence de R et m le cardinal du graphe de R.

Montrez que $n^2 \leq km$. Cas d'égalité.

Exercice 25.40 : (niveau 2)
Soient E un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$.

1°) Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2$.

2°) On suppose que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, $(i \neq j) \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq 2$.
Soit $x \in E$.
On note B la boule fermée de centre x et de rayon R : $B = \{y \in E / \|x - y\| \leq R\}$.
On suppose que B contient $x_1, ..., x_n$.
Montrer que $R \geq \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n}}$.

Exercice 25.41 : (niveau 2)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t AA = I_n$. Que peut-on dire de A ?

Exercice 25.42 : (niveau 2)
Soient $A, B \in O(3, \mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A) = \det(B) = 1$.
Que peut-on dire au sujet de la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés à A et B ?

Exercice 25.43 : (niveau 3)
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormale.

1°) Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$. Calculer la distance euclidienne de e_1 à H.

2°) Soit $H' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k = 0\}$. Calculer la distance euclidienne de e_1 à H'.

3°) Soit $F = H \cap H'$. Préciser la dimension de F et calculer la distance euclidienne de e_1 à F.

Exercice 25.44 : (niveau 3)
Soit E un espace préhilbertien réel.
Montrer que $\{(x, y) \in E^2 / (x, y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2 .

Exercice 25.45 : (niveau 3)
Soient E un espace euclidien et α un réel non nul.
On appelle inversion de puissance α l'application i_α, de $E \setminus \{0\}$ dans $E \setminus \{0\}$, définie par

$$i_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\|x\|^2} x.$$

1°) Montrer que $i_\alpha \circ i_\alpha = Id_{E \setminus \{0\}}$.

2°) Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On note S la sphère de centre a passant par 0.
Montrer que $i_\alpha(S \setminus \{0\})$ est un hyperplan affine orthogonal à a ne passant pas par 0.
Réciproquement, étudier l'image par i_α d'un hyperplan affine ne passant pas par 0.

3°) Soit S une sphère de rayon r et de centre a, ne passant pas par 0.
a) Montrer que si $\alpha = \|a\|^2 - r^2$, $i_\alpha(S) = S$.
b) Déterminer $i_\alpha(S)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 25.46 : (niveau 3)
Soient E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E.

1°) On pose $v = u - Id_E$. Montrer que $Ker(v) = Im(v)^\perp$.

2°) Soit $x \in E$. On note y la projection orthogonale de x sur $Ker(v)$.
Montrer que y est la limite de $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 25.47 : (niveau 3)
Etude des ***polynômes de Legendre***.
Posons, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$< P, Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $Q_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n[(t^2-1)^n]}{dt^n}$.
Calculez le degré du polynôme Q_n.
Calculez $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

3°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrez que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à n.
b) Calculez la norme de Q_n.

4°) a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)Q_{n+2} = (2n+3)XQ_{n+1} - (n+1)Q_n$.
b) Montrez que, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dt}((1-t^2)Q'_n(t)) + n(n+1)Q_n = 0$.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrez que toutes les racines de Q_n sont simples et qu'elles sont incluses dans $]-1, 1[$.
Indication. On pourra raisonner par récurrence, en utilisant le théorème de Rolle.

Exercice 25.48 : (niveau 3)
Soit E un espace euclidien dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté $< x, y >$.
Considérons deux familles de vecteurs $(y_k)_{1\le k\le p}$ et $(z_k)_{1\le k\le p}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2 \ \ < y_i, y_j >=< z_i, z_j > .$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal f sur E tel que : $\forall k \in \mathbb{N}_p \ \ f(y_k) = z_k$.

1°) Soit $(a_k)_{1\leq k\leq p} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k y_k = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k z_k = 0$.

2°) Résoudre l'exercice dans le cas où $(y_1, \ldots, y_p)$ est libre.

3°) Résoudre l'exercice dans le cas général.

Exercice 25.49 : (niveau 3)
Soit E un espace euclidien de dimension $n > 0$.

1°) Si x et y sont deux vecteurs non nuls de E, on note $\widehat{(x, y)} = \arccos \dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$.

Montrer que $\widehat{(x, y)}$ est une quantité correctement définie.

2°) Si $p \in \mathbb{N}^*$, une famille de p vecteurs de $E \setminus \{0\}$, $(x_1, ..., x_p)$ est dîte obtusangle si et seulement si $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2 \ \ (i \neq j \Rightarrow \widehat{(x_i, x_j)} \in]\frac{\pi}{2}, \pi])$.
Par récurrence sur n, montrer qu'une famille obtusangle peut avoir $n+1$ éléments mais pas davantage.

3°) Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle dans laquelle, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ avec $i \neq j$, $\widehat{(x_i, x_j)} = \varphi$ (φ ne dépend ni de i ni de j).
Vérifier que $1 + (p - 1) \cos \varphi \geq 0$, avec égalité si $p = n + 1$.

Exercice 25.50 : (niveau 3)
On note E l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(f, g) \in E^2$, on note $< f, g >= \int_0^1 fg$.
Soit $c \in]0, 1[$. On pose $H = \{f \in E / \int_0^c f = 0\}$.

1°) Montrer que H est fermé.

2°) Calculer $H^\perp$.