# DM 55 : un corrigé

## Partie I : Rang d'une comatrice

**1°)** Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$. Notons $M$ la matrice déduite de $A$ en lui enlevant sa $i$-ème ligne et sa $j$-ème colonne. Alors $M$ est une matrice de taille $n-1$,
donc d'après le cours, le $(i, j)$-ème coefficient de $c(\lambda A)$ vaut
$[c(\lambda A)]_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\lambda M) = \lambda^{n-1}(-1)^{i+j}\det(M) = \lambda^{n-1}[c(A)]_{i,j}$.
Ceci montre que $\boxed{c(\lambda A) = \lambda^{n-1}c(A)}$ .

**2°)** Raisonnons par l'absurde en supposant que $c(A) \neq 0$. Ainsi, $A$ admet un cofacteur non nul, donc on peut extraire de $A$ une matrice inversible de taille $n-1$, mais $rg(A)$ est plus grand que le rang de toute matrice extraite de $A$, donc $rg(A) \geq n-1$, ce qui est faux. Ainsi, $c(A) = 0$.

**3°)** D'après le cours, $A\ {}^tc(A) = \det(A)I_n$, donc en prenant la transposée de cette égalité, $c(A)\ {}^tA = \det(A)I_n$, or $A$ est supposée inversible, donc $\det(A) \neq 0$. Ainsi, l'égalité précédente montre que $c(A)$ est inversible à gauche, donc est globalement inversible d'après le cours, d'inverse $\dfrac{1}{\det(A)}{}^tA$. Ainsi, $\boxed{rg(c(A)) = n}$ .

**4°)** L'égalité précédente montre également que ${}^tA^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}c(A)$,
donc $c(A) = det(A){}^tA^{-1}$, pour toute matrice inversible $A$.
En remplaçant dans cette égalité $A$ par $c(A)$, on obtient $c(c(A)) = \det(c(A))\ {}^tc(A)^{-1}$,
mais on a aussi $\det(c(A)) = \det(\det(A){}^tA^{-1}) = \det(A)^n\det(A^{-1}) = \det(A)^{n-1}$,
donc $c(c(A)) = det(A)^{n-1}(det(A)A^{-1})^{-1}$. Ainsi, $\boxed{c(c(A)) = det(A)^{n-2}A}$ .

**5°)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. d'après la question 1, $c(c(\lambda A)) = c(\lambda^{n-1}c(A)) = \lambda^{(n-1)^2}c(c(A))$, donc d'après la question précédente, $c(c(\lambda A)) = \lambda^{(n-1)^2}\det(A)^{n-2}A$. Mais d'après le théorème de d'Alembert, le polynôme $X^{(n-1)^2} - \det(A)^{2-n}$ possède au moins une racine (non nulle), donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda^{(n-1)^2} = \det(A)^{2-n}$. Alors, pour cette valeur de $\lambda$, $c(c(\lambda A)) = A$, ce qui montre qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $c(B) = A$.

**6°)** $\diamond$ L'espace vectoriel engendré par les colonnes de $A$ est de dimension $n-1$, donc d'après le théorème de la base incomplete, on peut extraire des colonnes de $A$ une base de $\text{Im}(A)$ de cardinal $n-1$ : il existe $j_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que les colonnes de la matrice extraite $(A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ j\in\mathbb{N}_n\setminus\{j_0\}}}$ est une base de $\text{Im}(A)$. En particulier, cette dernière matrice est de rang $n-1$. Ses $n$ lignes engendrent donc un espace de dimension $n-1$, donc il

existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ telle que les lignes de la matrice extraite $A' = (A_{i,j})_{\substack{i\in\mathbb{N}_n\setminus\{i_0\}\\ j\in\mathbb{N}_n\setminus\{j_0\}}}$ engendrent ce même espace. La matrice $A'$ est donc de rang $n-1$, or elle est de taille $n-1$, donc c'est une matrice extraite de $A$ de rang $n-1$.
$\diamond$ Avec les notations du point précédent, le cofacteur de $A$ de position $(i_0, j_0)$ est non nul, en tant que déterminant d'une matrice inversible, donc $c(A) \neq 0$.
$\diamond$ $A$ n'est pas inversible, donc $A\ {}^t c(A) = det(A)I_n = 0$, donc $\mathrm{Im}({}^t c(A)) \subset \mathrm{Ker}(A)$.
Or d'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = 1$,
donc $rg(c(A)) = rg({}^t c(A)) \leq 1$. On a vu que $c(A) \neq 0$, donc $rg(A) = 1$.

## Partie II : Le polynôme caractéristique

**7°)** Notons $\varphi$ l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$. $\varphi(1) = \varphi(X^0) = A^0 = I_n$.
Soient $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\diamond \quad \begin{aligned} \varphi(\alpha P) &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha b_n) X^n\right)(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha b_n) A^n \\ &= \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n A^n = \alpha\varphi(P). \end{aligned}$$

$$\diamond \quad \varphi(P+Q) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n + c_n) X^n\right)(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n + c_n) A^n = \varphi(P) + \varphi(Q).$$

$\diamond$ $\varphi(PQ) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} (b_{n-k} c_k)) X^n\right)(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} (b_{n-k} c_k)) A^n$. D'autre part, d'après les règles de calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$\varphi(P)\varphi(Q) = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n A^n\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n A^n\Big) = \sum_{p,q\in\mathbb{N}} b_p c_q A^{p+q}$, donc par sommation par paquets, $\varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{p+q=n} b_p c_q\Big) A^n$. Ainsi, $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$.
En conclusion, $\varphi$ est bien un morphisme d'algèbres.

**8°)** $\diamond$ Soit $t \in \mathbb{C}$. $\chi_A(t) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (A_{j,\sigma(j)} - t\delta_{j,\sigma(j)})$, donc en identifiant polynômes formels de $\mathbb{C}[X]$ et applications polynomiales, $\chi_A$ est bien un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
De plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\prod_{j=1}^{n} (A_{j,\sigma(j)} - X\delta_{j,\sigma(j)})$ est un polynôme de degré inférieur au cardinal de $\{i \in \mathbb{N}_n \ / \ \sigma(i) = i\}$, donc en particulier de degré strictement inférieur à $n$ lorsque $\sigma \neq Id_{\mathbb{N}_n}$.
Ainsi, on peut mettre l'expression précédente de $\chi_A$ sous la forme :
$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{n} (A_{j,j} - X) + Q(X)$ avec $\deg(Q) < n$. Ceci prouve que $\chi_A$ est un polynôme

de degré $n$, dont le coefficient dominant est égal à $(-1)^n$.

$\diamond$ $\chi_A(t) = 0 \Longleftrightarrow A - tI_n \notin GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow [\exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},\ \ AX = tX] \Longleftrightarrow t \in Sp(A)$, donc les racines de $\chi_A$ sont les valeurs propres de $A$.

$\diamond$ On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telle que $B = PAP^{-1}$. Soit $t \in \mathbb{C}$. Alors $\chi_B(t) = \det(B - tI_n) = \det(P(A - tI_n)P^{-1}) = \det(A - tI_n) = \chi_A(t)$, car le déterminant est un invariant de similitude. Ainsi, $\chi_A = \chi_B$.

**9°)** Soit $(j,k) \in \mathbb{N}_n^2$. Pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, notons $A_{i,j,k}$ le $(j,k)^{\text{ème}}$ coefficient de $A_i$. Si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} t^i A_i = 0$, alors en prenant le $(j,k)$-ème coefficient, $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} t^i A_{i,j,k} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} X^i A_{i,j,k}$ est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $r$ qui possède strictement plus de $r$ racines. Ce polynôme est donc identiquement nul. On en déduit que, pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $A_{i,j,k} = 0$. Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $A_i = 0$.

**10°)** $\diamond$ **Unicité.** Supposons qu'il existe $R_0, \dots, R_{n-1}$ et $S_0, \dots, S_{n-1}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, ${}^t c(A - tI_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i = \sum_{i=0}^{n-1} t^i S_i$. Alors la quantité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_i - S_i)$ s'annule pour tout complexe $t$, donc, d'après la question précédente, pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $R_i - S_i = 0$. Ceci prouve l'unicité.

$\diamond$ **Lemme.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_p^2$, soit $t \longmapsto m_{i,j}(t)$ un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 1.

Notons, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $M(t) = (m_{i,j}(t))_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\det(M(t)) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{p} m_{j,\sigma(j)}(t)$, donc $t \longmapsto \det(M(t))$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p$.

$\diamond$ Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. Le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice ${}^t c(A - tI_n)$ est égal au cofacteur de position $(j,i)$ de la matrice $A - tI_n$. Il s'agit donc du déterminant (au signe près) d'une matrice d'ordre $n-1$ dont les coefficients sont des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 1. D'après le lemme, le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice ${}^t c(A - tI_n)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, que l'on notera $P_{i,j}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p_{i,j,k} t^k$.

Ainsi, en posant, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $R_k = (p_{i,j,k})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on obtient ${}^t c(A - tI_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k R_k$, ce qui prouve l'existence.

**11°)** D'après le cours, $\boxed{(A - tI_n)\,{}^t c(A - tI_n) = det(A - tI_n) I_n = \chi_A(t) I_n}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\chi_A(t)I_n &= (A - tI_n)\sum_{k=0}^{n-1} t^k R_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^k A R_k - \sum_{k=1}^{n} t^k R_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} t^k (AR_k - R_{k-1}) + AR_0 - t^n R_{n-1}.
\end{aligned}$$

Convenons de poser $\boxed{R_{-1} = 0 = R_n}$ .

Alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\chi_A(t)I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k (AR_k - R_{k-1})$.

Ainsi, si l'on pose $\chi_A(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, on a montré que,

pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k (\lambda_k I_n - AR_k + R_{k-1}) = 0$.

Alors, d'après la question 9, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\boxed{\lambda_k I_n = AR_k - R_{k-1}}$ .

◇ Ainsi, $\chi_A(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k = \sum_{k=0}^{n} (A^{k+1}R_k - A^k R_{k-1})$. Il s'agit d'une somme télescopique, donc $\chi_A(A) = A^{n+1}R_n - R_{-1} = 0$, ce qui prouve le théorème de Cayley-Hamilton.

◇ $\chi_A(0) = \lambda_0$, donc $P(X) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^{k-1}$. Ainsi,

$P(A) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A^{k-1} = -\sum_{k=1}^{n} (A^k R_k - A^{k-1} R_{k-1}) = R_0$.

Or ${}^t c(A - tI_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i$, donc en remplaçant $t$ par $0$ dans cette égalité, on obtient que $R_0 = {}^t c(A)$. On en déduit que $c(A) = {}^t P(A) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k {}^t(A^{k-1}) = P({}^t A)$, car pour tout $k \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^k) = ({}^t A)^k$.

**12°)** Supposons que 0 est la seule valeur propre de $A$. Alors d'après la question 8, $\chi_A$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n$, de coefficient dominant $(-1)^n$, admettant 0 comme seule racine. Ainsi, $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = (-1)^n \chi_A(A) = 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. Il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Par récurrence, on montre alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$, donc en particulier, $\lambda^p X = A^p X = 0$. Or $X \neq 0$, donc $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.

## Partie III : Les matrices de rang 1

**13°)** D'après la question 3, lorsque $A$ est inversible, $c(A) = \det(A)\ ({}^tA)^{-1}$. Or $MN$ est inversible, donc $c(MN) = \det(MN)({}^t(MN))^{-1}$, mais $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ et $({}^t(MN))^{-1} = ({}^tN{}^tM)^{-1} = ({}^tM)^{-1}({}^tN)^{-1}$, donc
$c(MN) = \det(M)\det(N){}^tM^{-1}{}^tN^{-1} = c(M)c(N)$.

**14°)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le spectre de $A$ est fini, car c'est l'ensemble des racines de $\chi_A$ qui est de degré $n$, donc $\{\frac{1}{k} \ / \ k \in \mathbb{N}^*\} \cap Sp(A)$ est fini. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq N$, $\frac{1}{k} \notin Sp(A)$. Alors $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k\geq N}$ est une suite de matrices inversibles qui tend vers $A$, ce qui conclut.

**15°)** Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question précédente, il existe deux suites $(M_p)$ et $(N_p)$ de matrices inversibles qui tendent respectivement vers $M$ et $N$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$ est bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue. Ainsi, $M_pN_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} MN$.

$\diamond$ Les coefficients de $c(A)$ sont des fonctions polynômiales des coefficients de $A$, donc l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & c(A) \end{array}$ est continue. Ainsi, $c(M_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} c(M)$, $c(N_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} c(N)$ et $c(M_pN_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} c(MN)$. Mais d'après la question 13, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $c(M_pN_p) = c(M_p)c(N_p)$, donc en faisant tendre $p$ vers $+\infty$, on obtient, toujours grâce à la continuité du produit matriciel, que $c(MN) = c(M)c(N)$.

**16°)** Supposons que $M$ est un projecteur.
Alors $c(M)^2 = c(M^2) = c(M)$, donc $c(M)$ est aussi un projecteur.

**17°)** $\diamond$ $A$ étant un projecteur, on sait que $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{C}^n$.
De plus, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n - 1$. Ainsi il existe une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\mathrm{Im}(A)$ et $e_n$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A)$. Alors d'après le cours, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Notons $\tilde{A}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ et $0_{p,q}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{mat}(\tilde{A}, e) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$, donc $\chi_A(t) = (1-t)^{n-1}(-t)$, en tant que déterminant d'une matrice diagonale. Ainsi, $\boxed{\chi_A(t) = -t(1-t)^{n-1}}$ .

$\diamond$ Si l'on reprend les notations de la question 11, $P(t) = (1-t)^{n-1}$, donc d'après les questions 7 et 11, $c(A) = P({}^tA) = (I_n - {}^tA)^{n-1}$, mais $A^2 = A$, donc $({}^tA)^2 = {}^tA$. Ainsi, ${}^tA$ est un projecteur. Alors $I_n - {}^tA$ est le projecteur associé à ${}^tA$, donc $(I_n - {}^tA)^2 = I_n - {}^tA$. On en déduit que $\boxed{c(A) = I_n - {}^tA}$ .

**18°)** Posons $A = I_n - {}^tM$. Dans une base adaptée à la décomposition
$\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(M) \oplus \mathrm{Ker}(M)$, la matrice de $M$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$, donc la matrice de $A$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi $A$ est un projecteur de rang $n-1$ et on peut appliquer les questions précédentes. En particulier, $c(A) = I_n - {}^tA = M$, ce qui conclut.

**19°)** $\diamond$ $M$ étant diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PDP^{-1}$. $D$ étant diagonale, son rang est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls (c'est bien alors la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de $D$), donc tous les coefficients de $D$ sont nuls, sauf l'un des coefficients diagonaux, égal à $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\dfrac{1}{\lambda}D$ est une matrice de projecteur, donc $\left(\frac{1}{\lambda}M\right)^2 = \frac{1}{\lambda}M$, ce qui prouve que $\frac{1}{\lambda}M$ est un projecteur, que l'on notera $p$. Le rang de $p$ est égal au rang de $M$, donc $p$ est un projecteur de rang 1.
$\diamond$ D'après la question précédente, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $c(A) = p$.
D'après la question 1, pour tout $\mu \in \mathbb{C}^*$, $c(\mu A) = \mu^{n-1}c(A)$.
On peut choisir $\mu$ tel que $\mu^{n-1} = \lambda$, et dans ce cas, $c(\mu A) = \lambda p = M$, ce qui conclut.

**20.a°)** $\diamond$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1$. Notons $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$, que l'on complète en une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Dans cette base, la matrice de $A$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} & \lambda_1 \\ 0_{n,n-1} & \vdots \\ & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Supposons que $\lambda_n \neq 0$. D'après la question 8, $\chi_A = \chi_M = (\lambda_n - X)(-X)^{n-1}$, donc $\lambda_n$ est une valeur propre non nulle de $A$. On sait que deux sous-espaces propres forment une somme directe, donc $\dim(\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_n I_n)) \geq (n-1) + 1 = n$. On en déduit que $A$ est diagonalisable, ce qui est faux. Ainsi, $\lambda_n = 0$, ce qui signifie que $A(e_n) \in Vect(e_1, \ldots, e_{n-1}) = \mathrm{Ker}(A)$. On en déduit que $A^2(e_n) = 0$. Ainsi $A^2$ annule tous les vecteurs de $e$, ce qui prouve que $A^2 = 0$.
$\diamond$ Posons $e'_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$. $e'_1 \neq 0$ car $A \neq 0$, donc on peut compléter $(e'_1)$ en une base de $\mathrm{Ker}(A)$ notée $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$. Dans la base $(e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)$, la matrice de $A$ est égale à $A_1$, car $u(e_n) = e'_1$. Ainsi, $A$ et $A_1$ représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc elles sont semblables.

**20.b°)** $\diamond$ Notons $b = (b_1, \ldots, b_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $u_1$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base $b$ est égale à $D_1$.
$u_1(b_1) = 0$, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $u_1(b_i) = b_i$ et $u_1(b_n) = -b_1$.
On en déduit que $u_1^2(b_1) = 0$, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $u_1^2(b_i) = b_i$ et que $u_1^2(b_n) = 0$.
Ainsi, $D_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{D_1^2 - D_1 = A_1}$.
$\diamond$ On vérifie que $u_1^3(b_1) = 0$, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $u_1^3(b_i) = b_i$ et que $u_1^3(b_n) = 0$, donc $D_1^3 = D_1^2$, puis $D_1 A_1 = D_1(D_1^2 - D_1) = D_1^3 - D_1^2 = 0$ et de même, $A_1 D_1 = 0$, donc $\boxed{D_1 A_1 = A_1 D_1 = 0}$.
$\diamond$ Les $n-1$ premières lignes de $D_1$ sont indépendantes et la dernière est nulle, donc $\boxed{rg(D_1) = n-1}$.

**20.c°)** $\diamond$ Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QA_1Q^{-1}$. Posons $\boxed{D = QD_1Q^{-1}}$ . On déduit des formules de la question précédente que $D^2 - D = A$ et $AD = DA = 0$.

$\diamond$ $I_n - D = Q(I_n - D_1)Q^{-1}$, donc $rg(I_n - D) = rg(I_n - D_1) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
or cette matrice ne présente que deux colonnes non nulles, qui sont indépendantes, donc $\boxed{rg(I_n - D) = 2}$ .

$\diamond$ On a vu que $D_1^3 = D_1^2$, donc $\boxed{D^3 = D^2}$ .

**20.d°)** $\diamond$ D'après la question 8, $\chi_D = \chi_{D_1} = X^2(1 - X)^{n-2}$, donc avec les notations de la question 11, $P = -X(1 - X)^{n-2}$. On en déduit que
$c(D) = P({}^tD) = -{}^tD(I_n - {}^tD)^{n-2} = -{}^t((I_n - D)^{n-2}D) = -{}^t(Q(I_n - D_1)^{n-2}D_1Q^{-1})$.
Notons $v$ l'endomorphisme canoniquement associé à $I_n - D_1$. Ainsi, $v(b_1) = b_1$, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $v(b_i) = 0$ et $v(b_n) = b_1 + b_n$. On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(b_1) = b_1$, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $v^k(b_i) = 0$ et $v^k(b_n) = kb_1 + b_n$.

Ainsi, $(I_n - D_1)^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (n-2)A_1 + (I_n - D_1^2)$.

On en déduit que $(I_n - D_1)^{n-2}D_1 = D_1 - D_1^3 = D_1 - D_1^2 = -A_1$, donc $\boxed{c(D) = {}^tA}$ .

$\diamond$ Vérifions que $c({}^tD) = {}^tc(D)$ : soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. Le coefficient de position $(i,j)$ de $c({}^tD)$ est égal au cofacteur de position $(i,j)$ de ${}^tD$, c'est-à-dire à
$(-1)^{i+j}\det(([{}^tD]_{h,k})_{\substack{h\neq i \\ k\neq j}}) = (-1)^{i+j}\det((D_{k,h})_{\substack{h\neq i \\ k\neq j}}) = [c(D)]_{j,i}$, ce qui conclut.
Alors $c({}^tD) = A$, ce qu'il fallait démontrer.

**21°)** On dira que $A$ est une comatrice si et seulement si $A \in \{c(B) \ / \ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.
Si $A$ est une comatrice, d'après la partie I, son rang vaut 0, 1 ou $n$. Réciproquement, si $A$ est une matrice de rang 0, c'est la comatrice de la matrice nulle, si $rg(A) = 1$, c'est une comatrice d'après les questions 19 et 20, et si $A$ est inversible, c'est une comatrice d'après la question 5.
En conclusion, $\{c(A) \ / \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$ est l'ensemble des matrices de rang 0,1 ou $n$.