

Introduction

Dans tout ce problème, n désigne un entier strictement positif, et les espaces vectoriels sont toujours des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

Dans ce problème, on appelle corps toute $\mathbb{R}$ -algèbre, éventuellement non commutative, dans laquelle tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

Partie I : Étude d'un exemple

1°) Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que:

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

2°) Soit A une matrice non scalaire; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = aI_2 + bA\}$$

Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3°) Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si et seulement si $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$.

4°) Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de $\mathbb{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{A}$ et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

5°) On suppose que A est non scalaire et vérifie: $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$. Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6°) Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbb{B}$ comme dans I.2. Démontrer que si A et B sont semblables, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.

7°) On suppose que $\mathbb{A}$ est telle que: $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$. Vérifier que A est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?

Partie II : Quelques résultats généraux

Soit $\mathbb{D}$ une algèbre de dimension finie n .

1°) Soit a un élément de $\mathbb{D}$, démontrer que l'application φ_a , définie par:

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{D} \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.

2°) On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{D}$. $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme φ_a dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que l'application:

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a) \end{cases}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3°) On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z)$.

4°) Soit maintenant $\mathbb{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbb{A}$ est, ou n'est pas, un corps.

a) On suppose que $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ . Montrer que $\mathbb{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A .

b) En déduire que si $\mathbb{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.

c) On suppose que $\mathbb{A}$ est intègre, c'est-à-dire que:

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Montrer que, si A est une matrice non nulle de $\mathbb{A}$, l'application $\Phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est un corps.

Partie III : L'algèbre des quaternions

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que:

$$(*) \quad A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad AB + BA = 0$$

1°) Démontrer que n ne peut pas être impair.

2°) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3°) Lorsque t, x, y et z sont des réels, calculer le produit:

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$$

4°) En déduire:

(a) que les quatre matrices I_n, A, B et AB sont indépendantes et forment une base de $\mathbb{H}$;

(b) que $\mathbb{H}$ est un corps.

5°) On suppose dans toute la suite du problème que $n = 4$ et, en notant J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par:

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également $C = AB$.

a) Vérifier que les matrices A et B satisfont la condition (*). On appellera donc $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et $C = AB$. Ses éléments sont appelés **quaternions**. La base (I_4, A, B, C) de $\mathbb{H}$ sera notée $\mathcal{B}$.

b) Soit M une matrice non nulle de $\mathbb{H}$, vérifier que ${}^tM \in \mathbb{H}$; quel lien y a-t-il entre M^{-1} et tM ?

Partie IV : Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1°) On appelle quaternion pur un élément M de $\mathbb{H}$ tel que $M = -{}^tM$. Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension trois et de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$. On le note $\mathbb{L}$. Est-ce une sous-algèbre de $\mathbb{H}$?

2°) On munit $\mathbb{L}$ de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base $\mathcal{C}$ soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments M et N de $\mathbb{L}$ est noté $(M|N)$. Ainsi, si $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$ alors $(M|N) = xx' + yy' + zz'$.

On appelle norme de M la quantité $\|M\| = \sqrt{(M|M)}$.

Vérifier que:

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4.$$

3°) Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.

4°) Soit φ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de φ à $\mathbb{L}$ est un endomorphisme orthogonal : si $u \in L(\mathbb{L})$, u est un endomorphisme orthogonal si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{L}$, $\|u(M)\| = \|M\|$.

5°) Soient M et N deux quaternions purs. On veut démontrer que si M et N ont même norme, alors il existe $P \in \mathbb{H}$, non nulle, telle que: $M = P^{-1}NP$.

a) Commencer par examiner le cas où M et N sont colinéaires.

b) On suppose maintenant que M et N ne sont pas colinéaires. Vérifier que si M et N ont même norme :

$$M(MN) - (MN)N = \|M\|^2(M - N)$$

et en déduire une matrice P non nulle telle que $MP = PN$.

6°) Montrer qu'alors, si on écrit $P = \alpha I_4 + Q$, avec α réel et $Q \in \mathbb{L}$, Q est orthogonal à M et à N .

7°) En déduire que tout isomorphisme d'algèbre φ de $\mathbb{H}$ dans lui-même est défini par:

$$\varphi(M) = P^{-1}MP$$

où P est un élément non nul de $\mathbb{H}$. On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de A et de B , et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent A invariante.

Fin de l'énoncé.