MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 29 : du mardi 10 au vendredi 13 juin.

Espaces euclidiens

Liste des questions de cours

1°) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2°) Montrer que $A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

3°) Montrer que dans $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ muni d'un p.s à préciser, le sous-espace vectoriel $F = \{(x_n) \ / \ \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0\}$ ne possède pas de supplémentaire orthogonal.

4°) Si E est un espace euclidien, montrer que E et son dual sont naturellement isomorphes.

5°) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, montrer que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

6°) Enoncer et démontrer le théorème de la projection orthogonale.

7°) Enoncer le procédé de Gram-Schmidt et démontrer la partie existence.

8°) Présenter en justifiant l'interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.

9°) CNS pour qu'une projection soit un endomorphisme symétrique. Justifiez.

10°) Donner trois définitions d'un automorphisme orthogonal (conservation du produit scalaire, isométrie, condition matricielle) et montrer qu'elles sont équivalentes.

11°) Déterminer les matrices de $SO(2)$, en justifiant.

12°) Donner et justifier la définition du produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3. Exprimer en justifiant les coordonnées de $a \wedge b$ en fonction de celles de a et de b dans une base orthonormée directe.

1 Produits scalaires

Un produit scalaire est une forme billinéaire symétrique définie positive.
Espaces préhilbertiens réels.

Exemples : p.s canoniquement associé à une base, p.s canonique de $\mathbb{R}^n$: $(X, Y) \longmapsto {}^tXY$,
p.s canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $(A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
$l^2(\mathbb{R})$, p.s usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Identités de polarisation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$,
$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$, $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x|y)$.
Formule du parallélogramme ou de la médiane : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Théorème de Pythagore.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski.

Les espaces préhilbertiens sont des espaces vectoriels normés.

2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel

2.1 Orthogonalité en dimension quelconque

Couples de vecteurs orthogonaux, couples de parties orthogonales.
Orthogonal d'une partie : c'est un sous-espace vectoriel.

$A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$,
$A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

$\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Famille orthogonale, orthonormale. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.

Somme directe orthogonale d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Unicité du supplémentaire orthogonal. Exemple de sous-espace sans supplémentaire orthogonal.

2.2 Orthogonalité en dimension finie

Si E est de dimension finie, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

Dans un espace euclidien, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ et $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$.

Matrice du produit scalaire dans une base quelconque, matrice d'une forme bilinéaire.
Si $\Omega = \mathrm{mat}(< ., . >, e)$, $< x, y > = {}^t X \Omega Y$.

2.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Projection orthogonale.

Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F, $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$.

Théorème de la projection orthogonale, inégalité de Bessel.

Si $H = a^\perp$, $p_H(x) = x - \dfrac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$ et $s_H(x) = x - 2\dfrac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$.

Formules donnant la distance d'un point à un hyperplan affine.

2.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille libre finie ou dénombrable de vecteurs.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.

Existence de bases orthonormées, complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée.

3 Endomorphismes d'un espace euclidien E

3.1 Endomorphismes symétriques

$u \in L(E)$ est symétrique ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, u(y) >$,
u est symétrique si et seulement si sa matrice en base orthonormée est symétrique.

Une projection (resp : une symétrie) est un endomorphisme symétrique ssi elle est orthogonale.

3.2 Groupe orthogonal.

u est un automorphisme orthogonal si et seulement si il conserve le produit scalaire, ou bien si et seulement si il conserve la norme (isométrie vectorielle), ou bien si et seulement si sa matrice M en base orthonormée est inversible et vérifie $M^{-1} = {}^tM$.

Le groupe orthogonal $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.
Sous-groupe des rotations. Isométries indirectes.

La symétrie orthogonale selon F est une rotation si et seulement si $dim(E) - dim(F)$ est paire.
Réflexions, retournements.

3.3 Matrices orthogonales.

Les groupes $O(n)$ et $SO(n)$.

$$\begin{aligned} M \in O(n) &\iff \text{ses colonnes sont orthonormées} \\ &\iff \text{c'est une matrice de passage entre bases orthonormées.} \end{aligned}$$

Si e est orthonormée, $u \in O(E) \iff \text{mat}(u, e) \in O(n) \iff$u(e) est une base orthonormée.

3.4 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Partitionnement de l'ensemble des bases selon deux orientations.
Orientation de l'hyperplan $D^\perp$ selon un vecteur non nul de D.

Si e est une base orthonormée directe, $P_e^{e'} \in SO(n)$ ssi e' est orthonormée directe.
Si e est orthonormée directe, $u \in SO(E) \iff \text{mat}(u, e) \in SO(n) \iff u(e)$ est orthonormée directe.

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

4 Géométrie plane

Description de $SO(2)$.

$R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}, S_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}.$

$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$, $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.

Les morphismes $\theta \longmapsto R_\theta$ et $R_\theta \longmapsto e^{i\theta}$.
Si $\text{mat}(s, e) = S_\theta$, s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$.

Angle d'une rotation de $SO(E)$.

Angle orienté entre deux vecteurs non nuls du plan. $\cos\widehat{(x,y)} = \dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\widehat{(x,y)} = \dfrac{\det(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.
Relation de Chasles.

Dans un espace préhilbertien quelconque, l'angle non orienté est $\widehat{(x,y)} = \arccos\left(\dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}\right)$.

Équation d'une droite affine.

5 Géométrie dans l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

5.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Définition : $\forall x \in E \ \ \det(a, b, x) =< a \wedge b, x >$.

$(a, b) \longmapsto a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique.

(a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.
Lorsque a et b sont deux vecteurs indépendants, caractérisation géométrique de $a \wedge b$.

Identité de Lagrange : Pour tout $(a, b) \in E^2$, $< a, b >^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$.

Coordonnées de $a \wedge b$ dans une base orthonormée directe.

5.2 Equations de plan et de droites en dimension 3

5.3 Le groupe orthogonal en dimension 3

Théorème (admis) de réduction en base orthonormée d'un automorphisme orthogonal en dimension n sous la forme d'une matrice diagonale par blocs de tailles 1 ou 2.

Rotation définie par un axe et un angle.

Il existe une base orthonormée directe dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Fin des colles pour cette année !