

Feuille d'exercices 25.

Corrigé de quelques exercices

Exercice 25.15 :

1°) A est symétrique, donc il existe $P \in O(p)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.

De plus, A est définie positive, donc, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\lambda_i \in Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$ et $R(A) = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$.

${}^tR(A) = P^t\Delta^tP = R(A)$, donc $R(A)$ est symétrique.

De plus, $Sp(R(A)) = Sp(\Delta) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $R(A)$ est définie positive.

Enfin, $R(A)^2 = P\Delta^2P^{-1} = A$.

2°) \diamond Notons $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{\lambda}{x})$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On remarque que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$, or $u_0 > 0$, donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est correctement défini et appartient à \mathbb{R}_+^* .

\diamond f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{x^2})$,

donc $f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{\lambda}$. Traçons le tableau de variations de f .

x	0	$\sqrt{\lambda}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \sqrt{\lambda} \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

\diamond Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{u_n} - u_n) = \frac{1}{2u_n}(\lambda - u_n^2) \leq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante, minorée par $\sqrt{\lambda}$. Elle converge donc vers un réel $l \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

f étant continue en l , $l = f(l)$, donc $0 = f(l) - l = \frac{1}{2l}(\lambda - l^2)$, donc $l = \sqrt{\lambda}$.

En conclusion, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante qui tend vers $\sqrt{\lambda}$.

3°) [La suite $\Delta_n = P^{-1}X_nP$ vérifie les relations $\Delta_0 = I_p$ et $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$, donc c'est une suite de matrices diagonales. Si l'on note $u_{i,n}$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de Δ_n , la suite $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la question précédente, donc elle tend vers $\sqrt{\lambda_i}$, ce qui permet de conclure.

Pour gérer correctement les problèmes d'existence de ces matrices, il est plus simple de commencer par construire les suites $(u_{i,n})$, puis de construire D_n et X_n .

◇ Reprenons les notations de la première question. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, notons $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels définie par les relations suivantes : $u_{i,0} = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) : u_{i,n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{i,n} + \frac{\lambda_i}{u_{i,n}} \right).$$

D'après la seconde question, $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est correctement définie et elle converge vers $\sqrt{\lambda_i}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\Delta_n = \text{diag}(u_{1,n}, \dots, u_{p,n})$ et $R_n = P\Delta_n P^{-1}$. La suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers Δ , or l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est continue (elle est linéaire en dimension finie), donc $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P\Delta P^{-1} = R(A)$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $u_{i,n} > 0$, donc Δ_n est inversible et, d'après la relation (1), $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$. En multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite, on en déduit que R_n est inversible et que $R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$.

De plus $\Delta_0 = \text{diag}(1, \dots, 1) = I_p$, donc $R_0 = I_p$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = X_n$, ce qui montre que la suite (X_n) de l'énoncé est correctement définie et qu'elle converge vers $R(A)$.

Exercice 25.18 :

◇ *Sens direct :*

Supposons que p est orthogonal. Soit $x \in E$. $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, donc, d'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$, donc, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

◇ *Sens indirect :*

Première méthode :

On suppose que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Fixons $x \in E$. Soit $y \in \text{Ker}(p)$. On a

$\|x - y\| \geq \|p(x - y)\| = \|p(x)\| = \|x - (x - p(x))\|$ et $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$, donc $d(x, \text{Ker}(p)) = \inf_{y \in \text{Ker}(p)} d(x, y)$ est atteinte pour $y = x - p(x)$. Mais d'après le théorème

de la projection orthogonale, cette borne inférieure est uniquement atteinte lorsque y est la projection orthogonale de x sur $\text{Ker}(p)$, donc $x - p(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\text{Ker}(p)$. Ainsi $\text{Id}_E - p$ est un projecteur orthogonal, ainsi que p qui est son projecteur associé.

Seconde méthode :

On suppose que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Soit $y \in \text{Ker}(p)$ et $z \in \text{Im}(p)$: il s'agit de montrer que $y \perp z$.

On a $\|p(y + z)\|^2 \leq \|y + z\|^2$, c'est-à-dire $\|z\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2 \langle y|z \rangle$.

C'est aussi vrai en remplaçant y par ty pour tout $t > 0$: $0 \leq t^2\|y\|^2 + 2t \langle y|z \rangle$.

On simplifie par $t > 0$: $0 \leq t\|y\|^2 + 2 \langle y|z \rangle$, puis on fait tendre t vers 0 : $2 \langle y|z \rangle \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \text{Ker}(p)$, on peut également l'appliquer à $-y$, donc $2 \langle -y|z \rangle \geq 0$.

En conclusion, $\langle y|z \rangle = 0$.

Troisième méthode :

Supposons que p n'est pas orthogonal. Notons $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$. $G^\perp \not\subset F$ (sinon, comme $\dim(G^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(p)) = \dim(\text{Im}(p)) = \dim(F)$, on aurait $G^\perp = F$ et p serait un projecteur orthogonal), donc il existe $x \in G^\perp \setminus F$ (faire un dessin).

$p(x) = x - (x - p(x))$, mais $x \in G^\perp$ et $x - p(x) \in G$, donc

$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|x - p(x)\|^2 > \|x\|^2$, car $x \notin \text{Im}(p)$, donc $x \neq p(x)$.

Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.

Exercice 25.21 :

1°)

• La linéarité de l'intégrale permet de prouver que :

$$\begin{cases} \langle \alpha P + \beta Q, R \rangle = \alpha \langle P, R \rangle + \beta \langle Q, R \rangle \\ \text{et } \langle P, \alpha Q + \beta R \rangle = \alpha \langle P, Q \rangle + \beta \langle P, R \rangle. \end{cases}$$

Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

• Clairement, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle Q, P \rangle = \langle P, Q \rangle$.

Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P \rangle = \int_a^b f(t)|P(t)|^2 dt \geq 0$, car f est à valeurs positives.

Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. L'application $\begin{matrix} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)|P(t)|^2 \end{matrix}$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc elle est identiquement nulle. Or f ne s'annule en aucun point, donc, pour tout $t \in [a, b]$, $P(t) = 0$. Donc P admet une infinité de racines, ce qui prouve que P est nul. Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°)

• Soit (Q_n) une famille orthonormée de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Montrons que (1) : $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ deg}(Q_n) = n) \iff (\forall n \in \mathbb{N} Q_n \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^n))$.

L'implication " \implies " est claire.

Réciproquement, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.

Lorsque $n = 0$, $Q_0 \in \text{Vect}(1)$, donc Q_0 est un polynôme constant.

Or $Q_0 \neq 0$, car $\langle Q_0, Q_0 \rangle = 1 \neq 0$. Ainsi, $\text{deg}(Q_0) = 0$.

Lorsque $n \geq 0$, supposons que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\text{deg}(Q_k) = k$, et démontrons que $\text{deg}(Q_{n+1}) = n + 1$.

Sinon, $Q_{n+1} \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, donc (Q_0, \dots, Q_{n+1}) est une famille libre (car orthonormée) de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.

On en déduirait que $n + 2 = \text{card}(\{Q_0, \dots, Q_{n+1}\}) \leq \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$, ce qui est faux. Ainsi, $\text{deg}(Q_{n+1}) = n + 1$.

• Le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, joint à l'équivalence (1) démontre l'existence et l'unicité demandée par l'énoncé.

3°) a)

• P_n est à coefficients réels, donc $P_n(\bar{\alpha}) = 0$.

Ainsi, α et $\bar{\alpha}$ sont deux racines distinctes de P_n . Ceci prouve que $T = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ divise P_n .

Or $T = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + |\alpha|^2$, donc T est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2, unitaire et irréductible.

De plus, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = TP$, et $\deg(P) = \deg(P_n) - \deg(T) = n - 2$.

• $\int_a^b f(t)T(t)P(t)^2 dt = \langle P, P_n \rangle$, or $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-2})$, et $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, donc $\langle P, P_n \rangle = 0$.

Ainsi, l'application $\begin{matrix} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)T(t)P(t)^2 \end{matrix}$ est positive, continue et d'intégrale nulle, donc elle est identiquement nulle. Or f et T ne s'annulent en aucun réel de $[a, b]$, donc $P = 0$. On en déduit que $P_n = 0$, ce qui est faux car $\deg(P_n) = n \geq 0$.

b)

• Supposons que P_n admet au moins une racine multiple, notée α .

Alors, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $Q_n = TP$, où $T = (X - \alpha)^2$, puis on raisonne comme au a).

• Supposons que P_n admet au moins une racine α qui n'appartient pas à l'intervalle $]a, b[$.

Alors, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $Q_n = TP$, où $T = (X - \alpha)$, puis on peut raisonner

comme au a), car l'application $\begin{matrix} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)T(t)P(t)^2 \end{matrix}$ est de signe constant (au sens large).

4°) $XP_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ et (P_0, \dots, P_{n+2}) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$, donc

$$XP_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+2} \langle P_i, XP_{n+1} \rangle P_i.$$

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\} : \langle P_i, XP_{n+1} \rangle = \int_a^b f(t)P_i(t)XP_{n+1}(t) dt = \langle XP_i, P_{n+1} \rangle$,

or $\deg(XP_i) = i + 1 < n + 1 = \deg(P_{n+1})$, donc $\langle XP_i, P_{n+1} \rangle = 0$.

Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\langle P_i, XP_{n+1} \rangle = 0$, ce qui prouve que

$$XP_{n+1} = \langle P_n, XP_{n+1} \rangle P_n + \langle P_{n+1}, XP_{n+1} \rangle P_{n+1} + \langle P_{n+2}, XP_{n+1} \rangle P_{n+2}.$$