

Résumé de cours :
Semaine 32, du 2 juin au 7 juin.

Espaces euclidiens (suite)

1 Groupe orthogonal.

1.1 Caractérisations d'un automorphisme orthogonal.

Définition. Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un *automorphisme orthogonal* ou une *isométrie vectorielle* si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- conservation du produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- conservation de la norme : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
- si e est une base orthonormée de E , en posant $M = \text{mat}(u, e)$,
 M inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

Propriété. $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E .

Propriété. Si $u \in O(E)$, $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$.

Propriété. Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , $F^\perp$ est stable par u .

1.2 Les rotations.

Propriété. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$, mais la réciproque est fausse.

Définition. Soit $u \in O(E)$. On dit que u est une *rotation* si et seulement si $\det(u) = 1$.
 u est une *isométrie vectorielle indirecte* ou négative si et seulement si $\det(u) = -1$.

Propriété. L'ensemble des rotations de E , noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal*. L'ensemble des isométries indirectes de E est noté $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$. Il n'a pas de structure particulière.

1.3 Les symétries orthogonales

Propriété. La symétrie par rapport à F parallèlement à G (où $F \oplus G = E$) est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (ie : $G = F^\perp$).

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Notons s la symétrie orthogonale par rapport à F . $s \in SO(E)$ si et seulement si $\dim(E) - \dim(F)$ est paire.

En particulier, si F est un hyperplan, $s \in O^-(E)$ et, dans ce cas, s est appelée une *réflexion*, et si $\dim(F) = \dim(E) - 2$, s est une rotation, et dans ce cas, s est appelée un *retournement*.

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont perpendiculaires lorsque $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque $G^\perp \subset F$.

1.4 Matrices orthogonales.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est une *matrice orthogonale* si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- ${}^tMM = I_n$;
- $M^tM = I_n$;
- M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Propriété. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le *groupe orthogonal de degré n* et noté $O(n)$.

Propriété. Pour tout $M \in O(n)$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Définition. Les matrices orthogonales de déterminant égal à 1 sont appelées les *matrices de rotations*. Les matrices orthogonales de déterminant égal à -1 sont appelées les matrices orthogonales gauches ou indirectes. L'ensemble des matrices de rotations est un sous-groupe de $O(n)$, appelé *groupe spécial orthogonal de degré n* et noté $SO(n)$. L'ensemble des matrices orthogonales indirectes est noté $O^-(n) = O(n) \setminus SO(n)$. Il n'a pas de structure particulière.

Propriété. $M \in O(n)$ si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes (ou de ses vecteurs lignes) est orthonormale dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient e une base orthonormée de E et e' une base quelconque de E . e' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de e à e' est orthogonale.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $u \in O(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in O(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée.

Propriété. (Hors programme) Dans une matrice orthogonale droite, chaque coefficient est égal à son cofacteur. Dans une matrice orthogonale gauche, chaque coefficient est l'opposé de son cofacteur.

Propriété. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^{-1} = PD^tP$.

2 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, pour le moment non muni d'une structure euclidienne.

Notation. $\mathcal{B}$ étant l'ensemble des bases de E , on convient que $\forall (e, e') \in \mathcal{B}^2$, $e\mathcal{R}e' \iff \det(P_e^{e'}) > 0$.

Propriété. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}/\mathcal{R}$ est formé de deux éléments qui sont appelés les *orientations* de E .

“Orienter E ”, c'est choisir l'une de ces deux orientations qui devient l'ensemble des *bases directes*.

Hypothèse : jusqu'à la fin de ce chapitre, on suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

Définition. Soit D une droite vectorielle incluse dans E que l'on oriente en choisissant un vecteur unitaire $\vec{k} \in D$. “Orienter l'hyperplan $D^\perp$ par le vecteur $\vec{k}$ de D ”, c'est choisir comme orientation de $D^\perp$ l'ensemble des bases $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $D^\perp$ telles que $(e_1, \dots, e_{n-1}, \vec{k})$ est une base directe de E .

Propriété. Soient e et e' deux bases orthonormées de E . On suppose que e est directe. Alors e' est directe si et seulement si $P_e^{e'} \in SO(n)$.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée directe de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $u \in SO(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in SO(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée directe.

3 Produit mixte.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien **orienté** de dimension $n > 0$.

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Le **produit mixte** de $(x_1, \dots, x_n)$ est $\det_e(x_1, \dots, x_n)$, où e est une base orthonormée directe quelconque de E . Il est noté $\det(x_1, \dots, x_n)$ ou encore $[x_1, \dots, x_n]$.

Remarque.

Si on change l'orientation de l'espace E , le produit mixte est changé en son opposé.

Propriété.

On suppose que $n = 2$. L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Propriété. On suppose que $n = 3$. Le volume d'un parallélépipède dont les côtés correspondent aux vecteurs u, v , et w vaut $|\det(u, v, w)|$.

4 Géométrie plane

Notation. E est un plan euclidien orienté dont $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $u_\alpha = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$.

4.1 Le groupe orthogonal de degré 2

Propriété.

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}. \quad O^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$ et $S_\theta \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix}$.

Formules : $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$, $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $S_\theta^{-1} = S_\theta$ et $S_\alpha^{-1} R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}$.

Propriété. L'application $\begin{matrix} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO(2), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{matrix}$ est un morphisme surjectif de groupes. On en déduit que $(SO(2), \times)$ est un groupe commutatif.

Propriété. L'application $R_\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est un isomorphisme entre les groupes $(SO(2), \times)$ et $\mathbb{U}$.

4.2 Les isométries vectorielles du plan

Propriété. Soient $s \in O^-(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{mat}(s, e) = S_\theta$. s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$. Ainsi, les éléments de $O^-(E)$ sont les réflexions de E .

Définition. On suppose que E est orienté. Soit $r \in SO(E)$. La matrice R_θ de r dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas du choix de cette base. θ est appelé l'angle de la rotation r , déterminé à 2π près. Si on change d'orientation, cette mesure est changée en son opposé.

4.3 Angles

Notation. E désigne un plan euclidien orienté.

Définition. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E . L'angle orienté des vecteurs x et y est l'angle de l'unique rotation qui transforme $\frac{x}{\|x\|}$ en $\frac{y}{\|y\|}$. $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin(\widehat{x, y}) = \frac{\det(x, y)}{\|x\|\|y\|}$.

Propriété. Les x_i désignant des vecteurs non nuls de E , on a les formules suivantes :

- ◇ Relation de Chasles : $\widehat{(x_1, x_2)} + \widehat{(x_2, x_3)} = \widehat{(x_1, x_3)}$.
- ◇ $\widehat{(x_2, x_1)} = -\widehat{(x_1, x_2)}$.
- ◇ $\widehat{(x_1, x_2)} = 0 \iff \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_+x_2$ et $\widehat{(x_1, x_2)} = \pi \iff \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_-x_2$.
- ◇ Si r est une rotation, $\widehat{(r(x_1), r(x_2))} = \widehat{(x_1, x_2)}$.
- ◇ Si s est une réflexion, $\widehat{(s(x_1), s(x_2))} = -\widehat{(x_1, x_2)}$.

Définition. E est un espace préhilbertien quelconque. L'angle non orienté ou écart angulaire des vecteurs $x, y \in E$ est $\widehat{(x, y)} = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$.

- Lorsque $\widehat{(x, y)} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, cet angle est dit aigu ;
- Lorsque $\widehat{(x, y)} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, cet angle est dit obtus ;
- Lorsque $\widehat{(x, y)} = \frac{\pi}{2}$ (i.e lorsque $x \perp y$), on dit que c'est un angle droit ;
- Lorsque $\widehat{(x, y)} \in \{0, \pi\}$, on dit que c'est un angle plat :

4.4 Les droites affines du plan usuel

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ euclidien orienté.

Propriété. Les droites affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + w = 0$, où $(u, v) \neq 0$.

Le vecteur de coordonnées (u, v) est orthogonal à la droite.

Les droites non parallèles à $\vec{j}$ admettent une équation de la forme $y = px + q$, p étant appelé la pente de la droite.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et orthogonale au vecteur (u, v) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et dirigée par le vecteur (u, v) a pour équation $-v(x - x_0) + u(y - y_0) = 0 = \begin{vmatrix} u & x - x_0 \\ v & y - y_0 \end{vmatrix}$.

Propriété. La droite passant par les points (supposés distincts) de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$.

5 Géométrie dans l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E . On dit que $\mathcal{E}$ est l'espace usuel. On fixe un repère de $\mathcal{E}$, noté $R = (O, e)$, où e une base orthonormée directe de E , notée $e = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $e = (e_1, e_2, e_3)$ selon les cas.

5.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Définition. Si $a, b \in E$, $a \wedge b$ est l'unique vecteur de E tel que $\forall x \in E \quad \det(a, b, x) = \langle a \wedge b, x \rangle$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. L'application $(a, b) \mapsto a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique.

Propriété. Soit $(a, b) \in E^2$. (a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit a et b deux vecteurs indépendants entre eux.
Alors $a \wedge b$ est un vecteur orthogonal à a et b tel que $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de l'espace. De plus $\|a \wedge b\| = \|a\| \|b\| \sin \phi$, où ϕ est l'angle non orienté entre a et b .

Formule. *Identité de Lagrange* : Pour tout $(a, b) \in E^2$, $\langle a, b \rangle^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$.

Propriété. $e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Formule. Si $a = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix}_e$ et $b = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix}_e$ alors $a \wedge b = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \\ -\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}_e$.

Il faut savoir le démontrer.

5.2 Equation d'un plan

Propriété. Les plans affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + wz + t = 0$, où $(u, v, w) \neq 0$.

Le vecteur de coordonnées (u, v, w) est orthogonal (on dit aussi normal) au plan.

La direction du plan est le plan vectoriel d'équation $ux + vy + wz = 0$.

Propriété. Deux plans de $\mathcal{E}$ d'équations $ux + vy + wz + t = 0$ et $u'x + v'y + w'z + t' = 0$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') sont colinéaires, donc si

et seulement si $\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}_e \wedge \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{vmatrix}_e = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et orthogonal au vecteur (u, v, w) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigé par deux vecteurs indépendants de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_0 & u & u' \\ y - y_0 & v & v' \\ z - z_0 & w & w' \end{vmatrix} = 0$.

5.3 Système d'équations d'une droite

Propriété. Une droite affine de $\mathcal{E}$ admet un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} ux + vy + wz + t = 0 \\ u'x + v'y + w'z + t' = 0 \end{cases}, \text{ où } ux + vy + wz + t = 0 \text{ et } u'x + v'y + w'z + t' = 0 \text{ sont les équations}$$

de deux plans affines non parallèles. Cette droite est dirigée par le vecteur $\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}_e \wedge \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{vmatrix}_e$.

5.4 Le groupe orthogonal en dimension 3

Théorème. Réduction des matrices orthogonales :

On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Si $u \in O(E)$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

où $\tau_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ avec $\sin \theta_i \neq 0$ et $k_1 + k_2 + 2p = n$.

Notation. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On désigne par $r(\omega, \theta)$ l'unique rotation de E qui laisse invariant ω et qui induit sur le plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω , la rotation d'angle θ .

Propriété. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe une base orthonormée directe e de

E telle que $\text{mat}(r(\omega, \theta), e) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément, on peut choisir $e = (i, j, k)$ où

(i, j) est une base orthonormée directe du plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω et où $k = \frac{\omega}{\|\omega\|}$.

Théorème. Si $r \in SO(E)$, il existe $\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $r = r(\omega, \theta)$.

Remarque. Si $r \in SO(E)$, on obtient ω tel que $r = r(\omega, \theta)$, en étudiant l'équation $r(x) = x$, c'est-à-dire en recherchant les vecteurs propres pour la valeur propre 1. De plus, $\boxed{\text{Tr}(r) = 1 + 2 \cos \theta}$.

Remarque. Soit $u \in O^-(E)$. $\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = 1$, donc $-u \in SO(E)$.

Ainsi, on peut décrire géométriquement une isométrie indirecte, en déterminant $\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $u = -r(\omega, \theta)$.

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on fixe deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n , une application f de U dans F , où U est un ouvert de E , une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de F .

6 Dérivées partielles

Définition. Fixons $a \in U$ et $v \in E \setminus \{0\}$.

Si $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, on dit que f est partiellement dérivable en a selon le vecteur v , et dans ce cas, la dérivée de $t \mapsto f(a + tv)$ en 0 est appelée la dérivée partielle de f en a selon le vecteur v ; elle est notée $D_v f(a)$: $D_v f(a) = \left(\frac{d}{dt} [f(a + tv)] \right) (0)$.

Propriété. Pour tout $x \in U$, notons $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e'_i$. $D_v f(a)$ est définie si et seulement si, pour

tout $i \in \mathbb{N}_n$, $D_v f_i(a)$ est définie, et dans ce cas, $D_v f(a) = \sum_{i=1}^n D_v f_i(a) e'_i$.

Propriété. Soient $g : U \rightarrow F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $D_v(f)(a)$ et $D_v(g)(a)$ sont définies, alors $D_v(\alpha f + \beta g)(a)$ est définie et $D_v(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha D_v(f)(a) + \beta D_v(g)(a)$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{R}$. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si $D_v(f)(a)$ et $D_v(g)(a)$ sont définies, alors $D_v(fg)(a)$ est définie et $D_v(fg)(a) = g(a) D_v(f)(a) + f(a) D_v(g)(a)$.

Définition. Soit $j \in \mathbb{N}_p$. Si elle existe, on appelle $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en a la dérivée partielle de f en a selon le vecteur e_j . Dans ce cas, on la note $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

7 Différentielle

Définition. On dit que f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si il existe une application linéaire de E dans F , qui est alors unique et notée $df(a)$ telle que, lorsque $h \in E$ tend vers 0, $f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$. Dans ce cas, $df(a)$ est appelée la différentielle de f en a .

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si f est dérivable en a . Dans ce cas, $d(f)(a).h = f'(a).h = h.f'(a)$ et $f'(a) = d(f)(a).1$.

Propriété. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Propriété. On suppose que f est différentiable en a . Alors pour tout $v \in E$, f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur v et $D_v f(a) = d(f)(a)(v)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si f est différentiable en a , alors $d(f)(a) = \sum_{j=1}^p dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$,

Définition. Notons $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e'_i$. Si f est différentiable en a , on appelle matrice jacobienne de

f en a , et on note $J_f(a)$, la matrice de $d(f)(a)$ dans les bases e et e' . Alors, $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Définition. On dit que f est différentiable sur U lorsque, pour tout $a \in U$, f est différentiable en a . Dans ce cas, on dispose de la différentielle de f , notée $df : U \rightarrow L(E, F)$.

8 Cas des applications numériques

8.1 Le gradient

Notation. dans ce paragraphe, on suppose que $F = \mathbb{R}$.

Définition. Supposons que E est un espace euclidien et que f est différentiable en a . Il existe un unique vecteur de E , appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$ tel que : $\forall h \in E \quad \langle \nabla f(a), h \rangle = df(a)(h)$.

Si $e = (e_1, \dots, e_p)$ est une base **orthonormée** de E , $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j$.

$-\nabla f(a)$ est la direction de plus grande pente.

8.2 Recherche des extrema

Définition. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, $a \in U$ est un point critique de f si et seulement si, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.

Théorème. Si f est différentiable et si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f .

9 Applications continûment différentiables

9.1 Définition

Définition. On dit que f est une application de classe C^1 sur U , ou qu'elle est continûment différentiable sur U si et seulement si f est différentiable et $d(f)$ est continue de U dans $L(E, F)$.

Théorème. f est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, l'application $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f est définie et continue de U dans F .

Propriété. f est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, l'application $D_v(f)$ est définie et continue.

Propriété. $f : U \rightarrow F$
 $x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) e'_i$ est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f_i est de classe C^1 sur U .

9.2 Exemples

Propriété. Si $f \in L(E, F)$, alors f est de classe C^1 et, pour tout $a \in E$, $d(f)(a) = f$.

Lemme : Si F, F' et F'' sont trois $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et si $B : F \times F' \rightarrow F''$ est une application bilinéaire continue, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in F \times F'$, $\|B(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$.

Propriété. Soient F' et F'' deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et $B : F \times F' \rightarrow F''$ une application bilinéaire. Alors B est de classe C^1 et $d(B)(u, v)(h, h') = B(h, v) + B(u, h')$.

Il faut savoir le démontrer.