Résumé de cours :
Semaine 33, du 10 juin au 13 juin.

Première partie
Calcul différentiel (suite et fin)

Dans ce chapitre, on fixe deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n, une application f de U dans F, où U est un ouvert de E, une base $e = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et une base $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de F.

1 Composition

Théorème. Soit G un troisième $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}^*$ et V un ouvert de F.
Soient $\begin{array}{rccc} f : & U & \longrightarrow & V \\ & x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e'_i \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g : & V & \longrightarrow & G \\ & y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e'_i & \longmapsto & g(y) \end{array}$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1). Alors $g \circ f$ est différentiable (resp : de classe C^1) et , pour tout $a \in U$, on a $d(g \circ f)(a) = d(g)(f(a)) \circ d(f)(a)$ et $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Règle de la chaîne : $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))$.

Propriété. Soient I un intervalle (non nécessairement ouvert) de $\mathbb{R}$, $\begin{array}{rccc} M : & I & \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(t) e_j \end{array}$ un arc paramétré dérivable (resp : de classe C^1) et $f\ : U \longrightarrow F$ une application différentiable (resp : de classe C^1). Alors $f \circ M$ est un arc paramétré dérivable (resp : de classe C^1) à valeurs dans F.

De plus, $(f \circ M)'(a) = d(f)(M(a)).M'(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} M'_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(M(a))$.

Lorsque $F = \mathbb{R}$ et E est euclidien, on a aussi $(f \circ M)'(a) =< [\nabla f](M(a)) | M'(a) >$.

Remarque. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$, on peut écrire cette formule sous la forme suivante :

$$\forall a \in I \quad \frac{d\big[f(M_1(t), \ldots, M_p(t))\big]}{dt}(a) = \sum_{j=1}^{p} M'_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_1(a), \ldots, M_p(a)).$$

Propriété. Si U est convexe, f est constante si et seulement si f est de classe C^1 et $d(f) = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient $f\ : U \longrightarrow F$ et $\varphi\ : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1). Alors $\begin{array}{rccc} \varphi.f: & U & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \varphi(x).f(x) \end{array}$ est une application différentiable (resp : de classe C^1) et

$$\forall a \in U\ \ \forall h \in U\ \ d(\varphi.f)(a).h = [d\varphi(a).h].f(a) + [\varphi(a)].[d(f)(a).h].$$

2 Un peu de géométrie différentielle

2.1 Vecteurs tangents

Définition. Soit X une partie de E et x un point de X. Soit v un vecteur de E.
On dira que v est un vecteur tangent à X en x si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré $M\ :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$ dérivable en 0 tel que $x = M(0)$ et $v = M'(0)$.
En résumé, lorsque $v \neq 0$, v est tangent à X en x si et seulement si v dirige la tangente en x à un arc paramétré tracé sur X passant par x.

2.2 Plan tangent à une surface

Notation. On suppose que E est euclidien de dimension 3.

Définition. On appelle nappe paramétrée différentiable toute application différentiable $\begin{array}{rccc} M: & U & \longrightarrow & E \\ & (u,v) & \longmapsto & M(u,v) \end{array}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. $M(U)$ est le support de la nappe M.

Définition. Soit $M\ : U \longrightarrow E$ une nappe différentiable et soit $(u_0, v_0) \in U$. Toute combinaison linéaire des vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$ est un vecteur tangent à $M(U)$ en $M(u_0, v_0)$. Lorsque $\big(\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\big)$ est libre, le plan affine $M(u_0, v_0) + \mathrm{Vect}\big(\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\big)$ est appelé le plan tangent à M en $M(u_0, v_0)$, et la droite affine $M(u_0, v_0) + \mathbb{R}\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est appelée la normale à M en $M(u_0, v_0)$.

Propriété. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable.
Alors la surface S d'équation $z = f(x, y)$ est appelée le graphe de l'application f. S est aussi le support de la nappe paramétrée différentiable $M\ : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $M(x, y) = \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ f(x,y) \end{array} \right.$.

Fixons $(x_0, y_0) \in U$ et notons $z_0 = f(x_0, y_0)$ et $M_0 = \left| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right._{\mathcal{R}}$.

Alors le plan tangent en M_0 à S a pour équation $z - z_0 = (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Il faut savoir le démontrer.

2.3 Surfaces de niveau

Notation. On suppose que E est euclidien. Soit U un ouvert de E et $f\ : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable.
On appelle surfaces (ou lignes) de niveau de f les ensembles $\{x \in U / f(x) = k\}$, où k est fixé.

Propriété. Soit x un point de la surface de niveau $X = \{x \in U / f(x) = k\}$. Alors tout vecteur tangent en x à X est orthogonal au gradient de f en x.
On dit que le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau de f.
Il faut savoir le démontrer.

Deuxième partie

Familles sommables

3 Familles sommables de réels positifs

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un ensemble I.
On fixe également une famille $u = (u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$ de réels positifs indexée par I.

Définition. On pose $\boxed{\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\in\mathcal{P}(I)\\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i \ \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$.

Définition. La famille u est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie finie J de I, $\sum_{i\in J} u_i \leq M$.

Propriété. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\{i \in I / u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque. Pour toute la suite, I est supposé au plus dénombrable.

Propriété. Soient $v = (v_i)_{i\in I}$ et $w = (w_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$, $v_i \leq w_i$. Si w est sommable, alors v est également sommable et $\sum_{i\in I} v_i \leq \sum_{i\in I} w_i$

Propriété. Lorsque $v = (v_i)_{i\in I}$ et $w = (w_i)_{i\in I}$ sont deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$ $v_i \leq w_i$, on peut toujours écrire que, dans $[0, +\infty]$, $\sum_{i\in I} v_i \leq \sum_{i\in I} w_i$.

Propriété. Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée à I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
- La suite $\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
- La suite $\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$.

De plus, dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in J_n} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{N}$, $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est convergente et dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème. Supposons que I est dénombrable et soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans I.
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente et dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Propriété de linéarité : Si $(v_i)_{i\in I}$ et $(w_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $(\alpha v_i + w_i)_{i\in I}$ est sommable. Dans ce cas, $\sum_{i\in I} (\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Convention : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
S'il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = +\infty$, on convient que $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Convention : lorsqu'on travaille dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on utilise la convention $0 \times (+\infty) = 0$.
On convient aussi, mais c'est plus universel, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \times (+\infty) = +\infty$.

Propriété. Soit $(v_i)_{i\in I}$ et $(w_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors, dans tous les cas, $\sum_{i\in I}(\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i$.

4 Familles sommables de complexes

Notation. I désigne un ensemble au plus dénombrable et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.
On fixe une famille $u = (u_i)_{i\in I}$ de complexes.

Définition. $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, $\boxed{(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable si et seulement si } \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty}$.

Propriété. Supposons que tous les u_i sont réels. On pose $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \max(-u_i, 0)$. : $u_i = u_i^+ - u_i^-$ et $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$. $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on pose $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.

Propriété. Supposons que les u_i sont complexes. Alors $\mathrm{Re}(u) = (\mathrm{Re}(u_k))_{k\in I}$ et $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Im}(u_k))_{k\in I}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. u est sommable si et seulement si $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont sommables et dans ce cas, on convient que $\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(u_k)$,

Propriété. $\forall (u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$, $\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in J_n} u_j$.

Il faut savoir le démontrer.

Inégalité triangulaire : si u est sommable, alors $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \le \sum_{i\in I} |u_i|$.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{N}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{Z}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\ge 0} u_n$ et $\sum_{n\ge 0} u_{-n}$ sont absolument convergentes et dans ce cas $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

5 Propriétés des familles sommables

Notation. I désigne un ensemble au plus dénombrable et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

5.1 Linéarité

Propriété de linéarité : soit $a = (a_i)_{i\in I}$ et $b = (b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de complexes et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors la famille $\alpha a + b = (\alpha a_i + b_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I}(\alpha a_i + b_i) = \alpha \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$ et $(v_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. Si pour tout $i \in I$, $|v_i| \leq u_i$ et si (u_i) est sommable, alors (v_i) est sommable et $|\sum_{i\in I} v_i| \leq \sum_{i\in I} u_i$.

Notation. $l^\infty(I,\mathbb{K})$est l'ensemble des familles $(u_i)_{i\in I}$ bornées de réels,
et pour $p \in [1, +\infty[$, $l^p(I,\mathbb{K}) = \left\{(u_i)_{i\in I} \ / \ \sum_{i\in I} |u_i|^p < +\infty\right\}$.

Propriété. $l^1(I,\mathbb{K})$, $l^2(I,\mathbb{K})$ et $l^\infty(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$.
De plus si (a_i) et (b_i) sont dans $l^2(I,\mathbb{K})$, alors (a_ib_i) est un élément de $l^1(I,\mathbb{K})$.

Propriété. Pour tout $(u_i), (v_i) \in l^2(I,\mathbb{R})$, on pose $((u_i)|(v_i)) = \sum_{i\in I} u_iv_i$.

$l^2(I,\mathbb{R})$ muni de $(.|.)$ est un espace préhilbertien.

Propriété.
- En posant $\|(u_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I} |u_i|$, $(l^\infty(I),\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé ;
- En posant $\|(u_i)_{i\in I}\|_1 = \sum_{i\in I} |u_i|$, $(l^1(I),\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé ;
- En posant $\|(u_i)_{i\in I}\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |u_i|^2}$, $(l^2(I),\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé.

5.2 Commutativité

Propriété. ***Commutativité de la somme d'une famille sommable.***
Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de I dans I.
Alors $(u_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est aussi sommable et $\sum_{i\in I} u_{\varphi(i)} = \sum_{i\in I} u_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. (Hors programme) Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de K dans I. Alors $(u_{\varphi(k)})_{k\in K}$ est aussi sommable et $\sum_{k\in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i\in I} u_i$.

Remarque. Lorsque $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, pour toute bijection d'un ensemble K dans I, $\sum_{k\in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i\in I} u_i$.

Théorème. Sommation par paquets pour des familles de réels positifs.
Soit $(I_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une partition de I (on accepte que certains I_q soient vides).
On suppose que $u = (u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$. Alors u est sommable si et seulement si
- ⋄ pour tout $q \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_q}$ est sommable et
- ⋄ la suite $\left(\sum_{i\in I_q} u_i\right)_{q\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Remarque. En cas de non sommabilité, on a encore : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i = +\infty$.
Ainsi, on peut énoncer le théorème sous une forme plus concise :
si $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est une partition de I et si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Corollaire. Interversion de sommations pour des suites doubles de réels positifs (Fubini).
Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

◇ La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
◇ Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_{p,q})_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable et la suite $\Big(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q}\Big)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.
◇ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(u_{p,q})_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable et la suite $\Big(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q}\Big)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Dans ce cas, on dit que $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable et on dispose des égalités suivantes.

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \Big).$$

Remarque. Si l'on accepte de travailler dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on peut énoncer ce théorème sous la forme suivante : Pour tout $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$, $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \Big)$.

Théorème. Sommation par paquets pour des familles de complexes.
Soit $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une partition de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille $\boxed{\text{sommable}}$ de complexes. Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable, et $\Big(\sum_{i \in I_q} u_i\Big)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable. De plus, $\boxed{\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i}$.

Corollaire. Interversion de sommations pour des suites doubles de complexes.
Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une suite double sommable de complexes. Pour tout $q_0 \in \mathbb{N}$, (u_{p,q_0}) est sommable, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, $(u_{p_0,q})$ est sommable, et les suites $\Big(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q}\Big)_{q \in \mathbb{N}}$ et $\Big(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q}\Big)_{p \in \mathbb{N}}$ sont sommables. De plus $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \Big)$.

Exemple. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes de complexes. Alors la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable et $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \Big(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p\Big)\Big(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q\Big)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Produit de Cauchy de deux séries. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$.
La série $\sum w_n$ est appelée le produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Propriété. Le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est absolument convergent.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.

Il faut savoir le démontrer.