Corrigé succinct X-ens PSI 2010 par Christophe Hénocq

Première partie

1.a) Si φ est définie par $\varphi(t) = f(t_0 + t, x_0 + ct)$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall t \in \mathbf{R} \ \ \varphi'(t) = D_1 f(t_0 + t, x_0 + ct) + cD_2 f(t_0 + t, x_0 + ct) = 0.$$

Donc φ est constante. En écrivant l'égalité $\varphi(0) = \varphi(-t_0)$, on obtient $f(t_0, x_0) = f(0, x_0 - ct_0) = u(x_0 - ct_0)$. Cette égalité est vraie pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^2$.

1.b) Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, la fonction $E(u)$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi E définit une application, clairement linéaire, de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$.
- Si $u \in \mathrm{Ker}(E)$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(u)(0, x) = u(x) = 0$. Donc u est la fonction nulle ; E est injective.
- Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, on pose $f = E(u)$, alors $\forall (t, x) \in \mathbf{R}^2 \ \ f(t, x) = u(x - ct)$. On a $D_1 f(t, x) = -cu'(x - ct)$ et $D_2 f(t, x) = u'(x - ct)$. Donc f est solution de (A).
- Réciproquement, d'après 1.a) si f est solution de (A), on a $f = E(u)$ avec $u : x \longmapsto f(0, x)$.

2.a) Soit $y \in \mathbf{R}$. Si $y \in q(\Omega)$, y est limite de la suite constante dont le terme général est y. Si $y \notin q(\Omega)$, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, l'intervalle $\left]y, y + \dfrac{1}{n+1}\right[$ n'est pas inclus dans $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$. Il contient donc un élément $y_n \in q(\Omega)$. La suite (y_n) converge vers y.
Si f et g sont deux solutions de (A) coïncidant sur Ω, il existe u et v dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ telles que $f = u \circ q$ et $g = v \circ q$. u et v coïncident sur $q(\Omega)$. comme tout réel est limite d'une suite de points de $q(\Omega)$, par continuité de u et v, elles coïncident sur $\mathbf{R}$. Donc $f = g$.

2.b) On considère la fonction u définie par $u(x) = 0$ si $x \notin]a, b[$ et $u(x) = (b - x)^2 (x - a)^2$ si $x \in]a, b[$. Il facile de voir que u répond à la question.

2.c) On suppose que $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$ contient $]a, b[$. Les deux fonctions $f : (t, x) \longmapsto 0$ et $g : (t, x) \longmapsto u(x - ct)$ où u est la fonction donnée dans la question 2.b), sont deux solutions distinctes de (A).

3.a) Notons $a_1, a_2, ..., a_k$ les réels $s_1, s_2, ..., s_k$ classés dans l'ordre croissant. Supposons que, pour tout j on ait $a_j - a_{j-1} \geq \dfrac{1}{k-1}$. Alors $a_k - a_1 = \displaystyle\sum_{j=2}^{k} (a_j - a_{j-1}) \geq 1$, ce qui contredit $(a_1, a_k) \in [0, 1[^2$. Il existe donc i et j tels que $0 < |s_i - s_j| < \dfrac{1}{k-1}$.

3.b) Supposons $m\alpha - [m\alpha] = n\alpha - [n\alpha]$ avec $m \neq n$. Alors $\alpha = \dfrac{[m\alpha] - [n\alpha]}{m - n} \in \mathbf{Q}$, ce qui est contradictoire.
T contient tous les nombres de la forme $x_n = n\alpha - [n\alpha]$ qui, de plus appartiennent à $[0, 1[$. Ainsi, si $r > 0$, on choisit k tel que $\dfrac{1}{k-1} < r$. Les nombres $x_1, ...x_k$ sont deux à deux distincts. D'après 3.a), il en existe deux t_1 et t_2 vérifiant $0 < |t_1 - t_2| < r$.
On suppose que $\mathbf{R} \setminus T$ contient un intervalle ouvert $]a, b[$. On choisit $r = b - a$, il existe t_1 et t_2 dans T vérifiant $0 < |t_1 - t_2| < r$. On pose $n = \left[\dfrac{a}{|t_1 - t_2|}\right]$. On a

$$n|t_1 - t_2| \leq a < (n+1)|t_1 - t_2| < n|t_1 - t_2| + r \leq b.$$

Le réel $(n+1)|t_1 - t_2|$ appartient à $T \cap]a, b[$, ce qui est contradictoire.

3.c) Soient f et g deux solutions de (A) coïncidant sur $\mathbf{Z}^2$.
- Si c est irrationel, l'ensemble $\mathbf{R} \setminus q(\mathbf{Z}^2)$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide. Donc, d'après 2.a), $f = g$.

• Si $c \in \mathbf{Q}$, on écrit $c = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$, alors l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{q}\right[$ est contenu dans $\mathbf{R} \setminus q(\mathbf{Z}^2)$. Donc, d'après 2.c) (A) a des solutions distinctes.

4.a) On a $D_1 g = D^2_{11} f - c D^2_{12} f$ et $D_2 g = D^2_{12} f - c D^2_{22} f$. Donc $D_1 g + c D_2 g = D^2_{11} f - c^2 D^2_{22} f = 0$. Donc g est solution de (A). Il existe $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ telle que $g = u \circ q$.

4.b) Soient v_1 une primitive de u et $v = -\dfrac{1}{2c} v_1$. On pose $h = v \circ v$. Alors

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2 \quad D_1 h(t,x) - c D_2 h(t,x) = -\frac{1}{2c}(-cu(x-ct) - cu(x-ct)) = u(x-ct) = g(t,x)$$

4.c) Le résultat précédent s'écrit $D_1 h - c D_2 h = g = D_1 f - c D_2 f$. Donc $D_1(f-h) - cD_2(f-h) = 0$. On applique le résultat de 1.b) en remplaçant c par $-c$. Il existe une fonction $v_+ \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ telle que $\forall (t,x)\ \ f(t,x) - h(t,x) = v_+(x+ct)$. En écrivant $h(t,x) = v_-(x-ct)$ avec $v_- \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, on a le résultat demandé. On a de plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $v_+(x) = f(0,x) - v_-(x)$. Donc v_+ est de classe $\mathcal{C}^2$.

4.d) Si $(v_+, v_-) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \times \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, on pose $\Phi(v_+, v_-) : (t,x) \longmapsto v_+(x+ct) + v_-(x-ct)$. On définit ainsi une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \times \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$.
• Si $(v_+, v_-) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2 \quad v_+(x+ct) + v_-(x-ct) = 0$. On a alors $v_+ = -v_-$; v_+ est paire et, en prenant $t = x/c$, v_+ est constante. $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est constitué des paires $(a, -a)$ a étant une constante.
• Si $f = \Phi(v_+, v_-)$ il est facile de vérifier que f est solution de (B).
• réciproquement si f est solution de (B), alors, d'après 4.c, $f \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

5.a) On écrit $f_1(t,x) = v_{1+}(x+ct) + v_{1-}(x-ct)$ et $f_2(t,x) = v_{2+}(x+ct) + v_{2-}(x-ct)$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$v_{1+}(x) + v_{1-}(x) = v_{2+}(x) + v_{2-}(x)$ et $v'_{1+}(x) - v'_{1-}(x) = v'_{2+}(x) - v'_{2-}(x)$. En dérivant la première relation on obtient, en combinant avec la seconde $v'_{1+}(x) = v'_{2+}(x)$ et $v'_{1-}(x) = v'_{2-}(x)$. Finalement $v_{1+}(x) = v'_{2+}(x) + a$ et $v_{1-}(x) = v_{2-}(x) - a$ avec a une constante. En remplaçant dans les expressions de f_1 et f_2, on a $f_1 = f_2$. Omettons l'hypothèse portant sur les dérivées partielles. Soit $f : (t,x) \longmapsto (x+ct) - (x-ct)$. La fonction nulle et f sont deux solutions distinctes de (B) coïncidant sur $\{0\} \times \mathbf{R}$.

5.b) On écrit $f(t,x) = v_+(x+ct) + v_-(x-ct)$. $f(0,0) = 1$ donc $v_+(0) + v_-(0) = 1$. Par ailleurs $f(0,x) = D_2 f(0,x)$ donc $v_+(x) + v_-(x) = v'_+(x) + v'_-(x)$. On en déduit $v_+(x) + v_-(x) = e^x$. La troisième condition donne $v'_+(x) - v'_-(x) = e^{-x}$. On obtient $v_+(x) = sh(x) + a$ et $v_-(x) = ch(x) - a$ avec a une constante. Finalement on trouve

$$f(t,x) = sh(x+ct) + ch(x-ct)$$

Deuxième partie

6.a) Si $(t_0, x_0) \in \Omega$, sachant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (cas non linéaire) : il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $X(t_0) = x_0$ et $\forall t \in I\ \ (t, X(t)) \in \Omega$ et $X'(t) = f(t, X(t))$.
(Le théorème du programme donne même l'existence et l'unicité d'une solution maximale passant par (t_0, x_0))

6.b) ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\psi'(t) = D_1 f(t, X(t)) + D_2 f(t, X(t)) X'(t) = D_1 f(t, X(t)) + D_2 f(t, X(t)) f(t, X(t)) = 0.$$

Donc ψ est constante. On en déduit que $\forall t \in I\ \ f(t, X(t)) = f(t_0, x_0)$ donc $X'(t) = f(t_0, x_0)$. On peut donc écrire $X(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0)$. l'arc géométrique $(t, X(t))$ est contenu dans la droite passant par $t_0, x_0)$ de pente $f(t_0, x_0)$.

6.c) On remarque que, sur l'intervalle I, $Z(t)$ et $X(t)$ se confondent. Comme ce sont des intervalles ouverts contenant t_0, il est possible de trouver $t \in I \cap J$ tel que $t > t_0$. Alors, pour tout $s \in [t_0, t[$, $Z(s) = X(s)$

donc $f(s, Z(s)) = f(t_0, x_0)$. Cela prouve l'existence de T et l'inégalité $T > t_0$. Supposons $T \in J$. Alors $(T, Z(T)) \in \Omega$. D'après la continuité en T de $t \longmapsto f(t, Z(t))$, on a $f(T, Z(T)) = f(t_0, x_0)$. En réutilisant la question 6.a) au point $(T, Z(T))$ on pourrait prolonger la solution Z au delà de T. Cela contredirait la définition de T. On peut en conclure que T est la borne supérieure (éventuellement $+\infty$) de J. Enfin, en raisonnant de la même manière à gauche de t_0, on trouve que la borne inférieure de J :

$$T' = \inf\{t \in J \ \ \forall s \in]t, t_0], f(s, Z(s)) = f(t_0, x_0)\}.$$

On a $J =]T', T[$ et pour tout $t \in J$, $\ f(t, Z(t)) = f(t_0, x_0)$.

7.a) Soient (t_0, x_0) et (t_1, x_1) deux éléments de $\mathbf{R}^2$. On sait que f est constante sur deuxs droites

$$f(t, x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0)) = f(t_0, x_0) \text{ et } f(t, x_1 + (t - t_1)f(t_1, x_1)) = f(t_1, x_1).$$

Si $f(t_0, x_0) \neq f(t_1, x_1)$, les deux droites se coupent en un point (a, b). alors $f(t_0, x_0) = f(a, b) = f(t_1, x_1)$, ce qui est contradictoire. Donc f est constante.

7.b) En remplaçant dans l'équation (C), on trouve $\dfrac{P(x)(-Q'(t) + P'(x))}{Q(t)^2} = 0$. Soit I un intervalle ouvert non vide sur lequel Q ne s'annule pas. Si x n(est pas une racine de P on a $Q'(t) = P'(x)$Donc la fonction polynomiale $t \longmapsto Q'(t) - P'(x)$ s'annule une infinité de fois. Elle est donc nulle. Ainsi Q est un polynôme de degré ≤ 1. De même pour P. Fnalement on trouve $f(t, x) = \dfrac{ax + b}{at + c}$.
En particulier sur $\Omega = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, on peut choisir $f : (t, x) \longmapsto \dfrac{x + 1}{t}$.

8.a) Soit $t \geq 0$. On considère la fonction $y \longmapsto y + tu(y)$, définie sur $\mathbf{R}$. Elle est strictement croissante, continue et admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Il existe donc un unique réel $a(t, x)$ solution de l'équation proposée.

8.b) Par composition f est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. De plus, pour $(t, x) \in \Omega$, $D_1 f(t, x) = \dfrac{-u'(a(t, x))u(a(t, x))}{1 + tu'(a(t, x))}$ et $D_2 f(t, x) = \dfrac{u'(a(t, x))}{1 + tu'(a(t, x))}$. Donc $D_1 f + f D_2 f = 0$. de plus on a, par définition de a, $a(0, x) = x$ donc $f(0, x) = u(x)$.

8.c) Montrons que la fonction v est croissante. Soient x et y tels que $x < y$. Soit $t_0 > 0$.
Supposons, par l'absurde $g(t_0, y) < g(t_0, x)$. on sait, d'après la question 6.c), que g est constante sur deux droites :

$$g(t, x + (t - t_0)g(t_0, x)) = g(t_0, x) \text{ et } g(t, y + (t - t_0)g(t_0, y)) = g(t_0, y).$$

Ces deux droites se coupent en un point $(a, b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. $\quad \left(a = t_0 + \dfrac{y - x}{g(t_0, x) - g(t_0, y)}\right)$
On trouve alors $g(t_0, x) = g(a, b) = g(t_0, y)$, ce qui est contradictoire. Donc $g(t_0, x) \leq g(t_0, y)$.
Faisons tendre t_0 vers 0. On en déduit que v est croissante. L'énoncé ne demande pas de montrer que v est de classe $\mathcal{C}^1$. Cela semble admis.
Montrons que $g = F(v)$.
Soit $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, alors, pour tout $t > 0$, $g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)) = g(t_0, x_0)$. En prenant la limite quand t tend vers 0, on a $g(0, x_0 - t_0 g(t_0, x_0)) = g(t_0, x_0)$. On remarque alors que $x_0 - t_0 g(t_0, x_0)$ est solution de l'équation $x_0 = y + t_0 g(0, y)$. donc $a(t_0, x_0) = x_0 - t_0 g(t_0, x_0)$ et $F(v)(t_0, x_0) = g(0, a(t_0, x_0)) = g(t_0, x_0)$. en faisant tendre t_0 vers 0, ce résultat est vrai sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

9.a) En suivant la démarche précédente, on résout, pour $t \geq 0$, l'équation en y : $x = y + ty$. On trouve $y = \dfrac{x}{1 + t}$ et $f(t, x) = \dfrac{x}{1 + t}$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.
A la question 7.b) nous avions trouvé $g : (t, x) \longmapsto \dfrac{x + 1}{t}$ comme solution sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. On peut remarquer que $f(t, x) = g(t + 1, x - 1)$.

9.c En suivant la démarche précédente, on résout, lorsque $t \geq 0$, l'équation en y : $x = y + tu(y)$. On trouve $y = x$ si $x < 0$ et $y = \dfrac{-1+\sqrt{1+4tx}}{2t}$ si $x \geq 0$. On en déduit la fonction f, solution de (C) sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, définie par $f(t,x) = 0$ si $x < 0$ et $f(t,x) = \left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4tx}}{2t}\right)^2$ si $x \geq 0$

Troisième partie

10.a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k(n-k)}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(n-k)}+\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k(n-k)}\right)^2 = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

10.b) On étudie la fonction $h : x \longmapsto x - 2ln(x)$. On a $h'(x) = \dfrac{x-2}{x}$. Donc h est croissante sur $[2,+\infty[$ et $h(2) \geq 0$. D'où le résultat.
Par ailleurs on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{n-1}\frac{dx}{x^2} \leq 2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n-1}\frac{dx}{x} = 1 + ln(n-1)$.
On en déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k(n-k)}\right)^2 \leq \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3}(1+\ln(n-1)) \leq \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3}(1+n/2) \leq \frac{8}{n^2}$.

10.c) On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $|c_1| \leq 1/2$. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$. On écrit alors $\displaystyle P_n(t) = c_n - \int_0^t P_n'(u)du$.
Donc $\displaystyle |P_n(t)| \leq |c_n| + \frac{n}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(n-k)^2}\right)\int_{[0,t]} e^{8n|u|}du \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}e^{8n|t|} \leq \frac{1}{n^2}e^{8n|t|}$.

10.d) On a $|P_n(t)x^n| \leq \dfrac{1}{n^2}\left(e^{8|t|}|x|\right)^n$. On considère l'ouvert $\Omega = \{(t,x),\ e^{8|t|}|x| < 1\}$. Il y a convergence normale de la série proposée sur Ω.
On dérive par rapport à x car c'est une série entière : $\displaystyle D_2 f(t,x) = \sum_{n\geq 1} nP_n(t)x^{n-1}$.
Par ailleurs $\displaystyle |P_n'(t)x^n| \leq \frac{n}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(n-k)^2}\right)\left(e^{8|t|}|x|\right)^n \leq \frac{4}{n}\left(e^{8|t|}|x|\right)^n$. Il y a convergence normale de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} P_n'(t)x^n$ sur tout sous ensemble de Ω de la forme $F_r = \{(t,x),\ e^{8|t|}|x| \leq r\}$ avec $r \in [0,1[$. De même la série donnant $D_2 f(t,x)$ converge normalement sur les F_r. On peut conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On a $\displaystyle D_1 f(t,x) = \sum_{n\geq 1} P_n'(t)x^n$.
Remarque : les séries de fonctions de deux variables ne sont pas au programme.
On fait un produit de Cauchy de séries absolument convergentes et on utilise l'expression de $P_n'(t)$ On a

$$D_1 f(t,x) + xf(t,x)D_2 f(t,x) = \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(k-\frac{n}{2})P_k(t)P_{n-k}(t)\right)x^n$$

Mais en posant $k' = n-k$ dans le coefficient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k-\frac{n}{2})P_k(t)P_{n-k}(t)$, on constate que celui-ci est nul. Donc f est solution de (D).

11.a) On sépare les cas :

▷ Si $c_1 < 0$ il est facile de montrer, par récurrence, que les P_n sont de degré $n-1$, le coefficient dominant de P_n étant strictement négatif.
▷ Si $c_1 > 0$ on établit par récurrence que P_n est de degré $n-1$ et que son coefficient dominant est strictement positif lorsque n est impair et strictement négatif lorsque n est pair. En effet si n est impair, on écrit $P'_n(t) = -\dfrac{n}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)P_{n-k}(t)$. pour chaque k le polynôme $P_k(t)P_{n-k}(t)$ est de degré $n-2$ et de coefficient dominant strictement négatif. Donc P_n est de degré $n-1$, et de coefficient dominant strictement positif. Même chose si n est pair.

11.b) On a $d_1 = c_1$ et, pour $n \geq 2$ on a $d_n = \dfrac{-n}{2(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}$
On raisonne par récurrence. On a bien $|c_1| \leq \frac{1}{2} \leq d_1$. Pour $n \geq 2$, on suppose l'inégalité vraie jusqu'au rang $n-1$. Alors $|d_n| \leq \dfrac{n}{2(n-1)}\displaystyle\sum_{k-1}^{n-1} c_k c_{n-k} = \dfrac{n}{2(n-1)} c_n \leq c_n$.

11.c) On suppose $R > 0$. alors, pout $s \in]-R, R[$, on a, en faisant un produit de Cauchy

$$H(s)^2 = \left(\sum_{n\geq 1} e_n s^n\right)\left(\sum_{n\geq 1} e_n s^n\right) = \sum_{n\geq 2} e_n s^n = H(s) - s$$

Sachant que $H(0) = 0$ on en déduit que $s \leq \frac{1}{4}$ et $H(s) = \dfrac{1-\sqrt{1-4s}}{2}$.
Inversement la fonction $H : s \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4s}}{2}$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$. Ses coefficients vérifient les mêmes relations que les c_n donc ce sont les c_n.

11.d) La fonction $G : s \longmapsto \sum d_n s^n$, ayant un rayon de convergence au moins égal à $1/4$, est définie sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. On calcule

$$sG'(s) + sG'(s)G(s) - G(s) = \sum_{n\geq 2}(n-1)d_n s^n + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} k d_k d_{n-k} s^n = \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(k - \frac{n}{2}) d_k d_{n-k}\right) s^n$$

Le coefficient de la série obtenue est nul. Il suffit, pour s'en convaincre, de poser $k' = n-k$.

11.e) Une étude rapide montre que la fonction $h : x \longmapsto xe^x$ est une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$. On trouve $w(s) = h^{-1}(s)$.
La dérivée de h ne s'annulant qu'en -1, w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et

$$w'(s) = \frac{1}{h'(w(s))} = \frac{1}{(w(s)+1)e^{w(s)}}.$$

On en déduit $sw'(s)(1+w(s)) - w(s) = w(s)e^{w(s)}w'(s)(1+w(s)) - w(s) = 0$. Donc w est solution de (E). De plus $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$.
La fonction $y : s \longmapsto w(c_1 s)$ est solution de (E) et vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = c_1 = G'(0)$.