DM 64. Corrigé

Partie I : Idéaux de $\mathcal{L}(V)$

1°) a) • $f = f\mathrm{I} \in \Delta_f$ donc $\Delta_f \neq \emptyset$.
De plus, si $g = f\varphi \in \Delta_f$, $g' = f\varphi' \in \Delta_f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $g + \lambda g' = f(\varphi + \lambda\varphi') \in \Delta_f$ donc Δ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$.
D'autre part, si $g = f\varphi \in \Delta_f$ et $\psi \in \mathcal{L}(V)$ on a $g\psi = f(\varphi\psi) \in \Delta_f$ (associativité de la composition), ce qui montre que Δ_f est un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$.
• Une démonstration similaire montre que Γ_f est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$.

b) • L'application nulle 0 appartient à J_W donc $J_W \neq \emptyset$.
De plus, si $(g, g') \in J_W^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in V$, $g(x), g'(x) \in W$, or W est un sous-espace vectoriel donc $(g+\lambda g')(x) = g(x)+\lambda g'(x) \in W$, ce qui montre que $g+\lambda g' \in J_W$; ainsi J_W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$.
Si $g \in J_W$ et $\psi \in \mathcal{L}(V)$ on a $\forall x \in V,\ g\psi(x) = g(\psi(x)) \in W$ donc $g\psi \in J_W$. Ainsi, J_W est un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$.
• Pareillement, $0 \in K_W$ donc $K_W \neq \emptyset$.
De plus, si $(g, g') \in K_W^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in W$, $g(x) = g'(x) = 0$,
donc $(g + \lambda g')(x) = g(x) + \lambda g'(x) = 0$. Ainsi $W \subset \mathrm{Ker}(g + \lambda g')$ puis $g + \lambda g' \in K_W$; ainsi K_W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$.
Si $g \in K_W$ et $\psi \in \mathcal{L}(V)$ on a $\forall x \in W,\ \psi g(x) = \psi(g(x)) = \psi(0) = 0$ donc $\psi g \in K_W$.
Finalement, K_W est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$.

2°) a)
• Posons $n = \dim(V)$ et $p = \dim(W)$. Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base (éventuellement vide) de W que l'on complète en une base de V notée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Alors $f \in J_W$ si et seulement si pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, donc si et seulement si il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n)$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A \\ \text{-----} \\ O \end{pmatrix}\begin{array}{l} \updownarrow\ p \\ \updownarrow\ n-p \end{array}$.
Notons φ l'isomorphisme $f \mapsto \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ de $\mathcal{L}(V)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Ainsi J_W a même dimension que $\varphi(J_W) = \left\{ \begin{pmatrix} A \\ \text{-----} \\ O \end{pmatrix}\begin{array}{l} \updownarrow\ p \\ \updownarrow\ n-p \end{array} \ / \ A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n) \right\}$, or l'application $A \longmapsto \begin{pmatrix} A \\ \text{-----} \\ O \end{pmatrix}\begin{array}{l} \updownarrow\ p \\ \updownarrow\ n-p \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n)$ dans $\varphi(J_W)$

(c'est linéaire, surjectif d'après l'expression précédente de $\varphi(J_W)$ et le noyau est clairement réduit à $\{0\}$), donc $\dim(J_W) = pn = \dim(W) \times \dim(V)$.

• Avec les mêmes notations, $f \in K_W \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \underset{\underset{p}{\longleftrightarrow}}{O} & \vdots & \underset{\underset{n-p}{\longleftrightarrow}}{B} \end{pmatrix}$

donc, selon les mêmes arguments, on obtient que
$dim(K_W) = n(n-p) = \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(W))$.

b)
• Considérons l'application $\delta : g \mapsto fg$ de $\mathcal{L}(V)$ dans lui-même.
Alors $\delta(\mathcal{L}(V)) = \Delta_f$, donc d'après la formule du rang,
$\dim(\Delta_f) = \dim(\mathcal{L}(V)) - \dim(\mathrm{Ker}\delta)$. Or le noyau de δ est formé des endomorphismes g tels que $fg = 0$, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Ker}f$; ainsi, $\mathrm{Ker}(\delta) = J_{\mathrm{Ker}f}$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}\delta) = \dim(V) \times \dim(\mathrm{Ker}f)$. Ainsi, $\dim(\Delta_f) = \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}f))$.
En appliquant encore la formule du rang, il vient $\boxed{\dim\Delta_f = \dim V \times \mathrm{rg}f\ .}$

• Pareillement, pour Γ_f, on introduit $\gamma\ :\ g \longmapsto gf : \gamma(\mathcal{L}(V)) = \Gamma_f$ et
$\mathrm{Ker}\gamma = \{g \in \mathcal{L}(V)\ /\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)\} = K_{\mathrm{Im}f}$,
d'où $\boxed{\dim\Gamma_f = \dim^2(V) - \dim(V)(\dim(V) - \dim(\mathrm{Im}f)) = \dim(V) \times \mathrm{rg}(f)}$.

c) $\diamond$ Soit $f \in \mathcal{L}(V)$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\mathrm{Im}(f\varphi) \subset \mathrm{Im}(f)$, donc $f\varphi \in J_{\mathrm{Im}(f)}$,
ce qui montre que $\Delta_f \subset J_{\mathrm{Im}(f)}$. De plus, $\dim(\Delta_f) = \dim(V) \times \mathrm{rg}(f) = \dim(J_{\mathrm{Im}(f)})$, donc $\Delta_f = J_{\mathrm{Im}(f)}$, pour tout $f \in \mathcal{L}(V)$.
$\diamond$ Nous sommes en dimension finie, donc W possède au moins un supplémentaire H dans V. Notons alors f le projecteur sur W parallèlement à H. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = W$ puis $\Delta_f = J_{\mathrm{Im}(f)} = J_W$.
$\diamond$ De même, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi f)$, donc $\Gamma_f \subset K_{\mathrm{Ker}(f)}$. Or $\dim(\Gamma_f) = \dim(V) \times \mathrm{rg}(f) = \dim(K_{\mathrm{Ker}(f)})$ d'après la formule du rang,
donc $\Gamma_f = K_{\mathrm{Ker}(f)}$, pour tout $f \in \mathcal{L}(V)$.
$\diamond$ Choisissons pour f le projecteur sur H parallèlement à W. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = W$ puis $\Gamma_f = K_{\mathrm{Ker}(f)} = K_W$.

3°) a) $\diamond$ Pour tout $f \in \mathcal{L}(V)$,
$f \in J_W \cap J_{W'} \Longleftrightarrow (\mathrm{Im}(f) \subset W) \wedge (\mathrm{Im}(f) \subset W') \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset W \cap W'$, donc $J_W \cap J_{W'} = J_{W\cap W'}$.
$\diamond$ $f \in K_W \cap K_{W'} \Longleftrightarrow (W \subset \mathrm{Ker}(f)) \wedge (W' \subset \mathrm{Ker}(f)) \Longleftrightarrow (W \cup W' \subset \mathrm{Ker}(f))$,
or $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel, donc
$f \in K_W \cap K_{W'} \Longleftrightarrow W + W' = \mathrm{Vect}(W \cup W') \subset \mathrm{Ker}(f)$,
ce qui montre que $K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}$.

b) On va prouver ces égalités par inclusions et comparaison des dimensions.
$\diamond$ Soit $f \in J_W$: on a certainement $\mathrm{Im}f \subset W \subset W+W'$, donc $J_W \subset J_{W+W'}$ et de même $J_{W'} \subset J_{W+W'}$, or $J_{W+W'}$ est un sous-espace vectoriel, donc $J_W + J_{W'} \subset J_{W+W'}$. De plus, $\dim(J_W + J_{W'}) = \dim J_W + \dim J_{W'} - \dim J_W \cap J_{W'} = \dim J_W + \dim J_{W'} - \dim J_{W\cap W'}$,

puis $\dim(J_W + J_{W'}) = \dim V \times (\dim W + \dim W' - \dim W \cap W') = \dim V \times \dim(W + W')$, ce qui montre que $\dim(J_W + J_{W'}) = \dim J_{W+W'}$.

On en déduit que que $\boxed{J_W + J_{W'} = J_{W+W'}\ .}$

$\diamond$ Soit $f \in K_W$: on a certainement $\mathrm{Ker} f \supset W \supset W \cap W'$, donc $K_W \subset K_{W\cap W'}$ et de même $K_{W'} \subset K_{W\cap W'}$, or $K_{W\cap W'}$ est un sous-espace vectoriel,

donc $K_W + K_{W'} \subset K_{W\cap W'}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\dim(K_W + K_{W'}) &= \dim K_W + \dim K_{W'} - \dim K_W \cap K_{W'} \\
&= \dim K_W + \dim K_{W'} - \dim K_{W+W'} \\
&= \dim V \times (\dim V - \dim W - \dim W' + \dim(W + W')) \\
&= \dim V \times (\dim V - \dim(W \cap W')) \\
&= \dim K_{W\cap W'}.
\end{aligned}$$

On en déduit que que $\boxed{K_W + K_{W'} = K_{W\cap W'}\ .}$

4°) a) $\diamond$ W existe certainement, il suffit de considérer l'ensemble des dimensions des sous-espaces H tels que $J_H \subset M$: c'est un ensemble non vide d'entiers (il contient 0), majoré par $\dim V$, il possède donc un plus grand élément qui est de la forme $\dim W$, où W vérifie les propriétés de l'énoncé.

$\diamond$ Soit $f \in M$. On a déjà montré que $J_{\mathrm{Im} f} = \Delta_f = \{f\varphi/\varphi \in \mathcal{L}(V)\}$, or M est un idéal à droite, donc $\Delta_f = J_{\mathrm{Im} f} \subset M$. Ainsi, $J_W + J_{\mathrm{Im} f} = J_{W+\mathrm{Im} f} \subset M$.

Par maximalité de $\dim W$, $\dim(W) \geq \dim(W + \mathrm{Im} f)$, or $W + \mathrm{Im}(f) \supset W$, donc $W + \mathrm{Im}(f) = W$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset W$, donc $f \in J_W$. Donc $M = J_W$.

b) De même, l'ensemble $\{\dim W \ / \ K_W \subset M\}$ est non vide car $K_V = \{0\} \subset M$, donc admet un minimum. Soit W un sous-espace vectoriel réalisant ce minimum. Comme ci-dessus, si $f \in M$, puisque M est un idéal à gauche, $\forall \varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\varphi f \in M$ donc $\Gamma_f \subset M$. Mais $\Gamma_f = K_{\mathrm{Ker} f}$ d'après **3**°a), on a donc $K_{\mathrm{Ker} f} + K_W = K_{\mathrm{Ker} f\cap W} \subset M$ ce qui implique, vu le choix de W, $\dim(\mathrm{Ker} f \cap W) \geq \dim W$ donc $W = \mathrm{Ker} f \cap W \subset \mathrm{Ker} f$ et donc $f \in K_W$. Donc $M \subset K_W$ et donc, finalement, $M = K_W$.

c) Ainsi, si M est un idéal à droite, d'après 4.a, il existe un sous-espace vectoriel W tel que $M = J_W$, puis d'après la question 2.c, il existe $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que $M = \Delta_f$.

De même, les questions 5.b et 2.c montrent que, pour tout idéal à gauche M, il existe $g \in \mathcal{L}(V)$ tel que $M = \Gamma_g$.

5°) a) On peut raisonner avec des matrices de manière analogue à la question 2.a.

On peut aussi considérer l'application $u \ : \ f \longmapsto f|_H^U$ de $J_U \cap K_W$ dans $\mathcal{L}(H, U)$, où H désigne un supplémentaire de W dans V.

u est correctement définie car, pour tout $f \in J_U \cap K_W$, pour tout $x \in V$, $f(x) \in U$.

u est linéaire car, pour tout $f, g \in J_U \cap K_W$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in V$, $u(\alpha f + g)(x) = (\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha u(f)(x) + u(g)(x) = (\alpha u(f) + u(g))(x)$, donc $u(\alpha f + g) = \alpha u(f) + u(g)$.

u est injective, car si $f \in J_U \cap K_W$ est tel que $u(f) = 0$, f est nulle sur H et sur W (car $W \subset \mathrm{Ker}(f)$), donc sur V car $V = H \oplus W$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.

Enfin, u est sujective car si $g \in L(H, U)$, il existe d'après le cours un unique $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que, pour tout $x \in W$, $f(x) = 0$ et pour tout $x \in H$, $f(x) = g(x)$. On a clairement $u(f) = g$.
Ainsi, u est un isomorphisme, ce qui montre que
$\dim(J_U \cap K_W) = \dim(\mathcal{L}(H, U)) = \dim(U) \times (\dim(V) - \dim(W))$.

b) Si H est idéal à gauche et à droite dans $\mathcal{L}(V)$, alors il existe des sous-espaces U et W tels que $H = J_U = K_W$. Dans ces conditions, on a $H = J_U \cap K_W = J_U$, d'où pour les dimensions, $(\dim V - \dim W) \times \dim U = \dim H = \dim V \times \dim U$, donc $\dim(U) \times \dim(W) = 0$. Ainsi, $\dim(U) = 0$ ou bien $\dim(W) = 0$.
Or si $\dim(U) = 0$, $U = \{0\}$ et $H = J_U = \{0\}$,
et si $\dim(W) = 0$, alors $H = K_W = \mathcal{L}(V)$.
Il en résulte que $\boxed{\text{les idéaux bilatères de } \mathcal{L}(V) \text{ sont réduits à } \{0\} \text{ et } \mathcal{L}(V).}$

Partie II : Bases stables de $\mathcal{L}(V)$

6°) $\diamond$ Notons $E_{i,j}$ la matrice de $f_{i,j}$ dans la base B. Pour tout $h, k \in \{1, \dots, n\}^2$, le (h, k)-ième coefficient de $E_{i,j}$ est égal à la h-ième coordonnée dans B du vecteur $f_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$, donc il s'agit de $\delta_{h,i}\delta_{k,j}$. Ainsi, $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de position (i, j) qui est égal à 1. Il s'agit de la (i, j)-ème matrice élémentaire.
$\diamond$ On sait que la famille $(E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or l'application $\varphi : f \longmapsto \mathrm{mat}(f, B)$ de $\mathcal{L}(V)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est d'après le cours un isomorphisme, donc S est une base de $\mathcal{L}(V)$ en tant qu'image d'une base par un isomorphisme.
$\diamond$ Soit $f, g \in S$. Il existe $i, j, h, k \in \mathbb{N}_n$ tels que $f = f_{i,j}$ et $g = f_{h,k}$.
Soit $\ell \in \mathbb{N}_n$. $fg(e_\ell) = f_{i,j}(\delta_{k,\ell} e_h) = \delta_{k,\ell}\delta_{j,h} e_i = \delta_{j,h} f_{i,k}(e_\ell)$, donc $fg = 0$ ou bien $fg = f_{i,k} \in S$, ce qui montre que S est une base stable de $\mathcal{L}(V)$.

7°) $\diamond$ Soit $f \in S'$ et $g \in S$. Supposons que $fg \neq 0$. Ainsi, $fg \in S$. De plus, d'après le cours, $\mathrm{rg}(fg) \le \mathrm{rg}(f) \le r$, donc $fg \in S'$.
De même, si $f \in S$ et $g \in S'$, en utilisant que $\mathrm{rg}(fg) \le \mathrm{rg}(g) \le r$,
on montre que $fg = 0$ ou $fg \in S'$.
$\diamond$ Soit $h \in \mathrm{Vect}(S')$ et $l \in \mathcal{L}(V)$. En posant $h = \displaystyle\sum_{f \in S'} \lambda_f f$ et $l = \displaystyle\sum_{g \in S} \mu_g g$, on obtient que $hl = \displaystyle\sum_{f \in S'} \sum_{g \in S} \lambda_f \mu_g fg$ ce qui est bien une combinaison linéaire d'éléments de S' d'après l'observation précédente. Ainsi, $\mathrm{Vect}(S')$ est un idéal à droite, et on démontre de même que c'est aussi un idéal à gauche.
$\diamond$ D'après la question I.5.b, $\mathrm{Vect}(S')$ est réduit à $\{0\}$ ou bien est égal à $\mathcal{L}(V)$. Mais S' contient au moins un élément de S, qui est non nul car S est libre, donc $\mathrm{Vect}(S') \neq \{0\}$. Ainsi, S' est une partie génératrice de $\mathcal{L}(V)$, et est libre comme sous-ensemble de S. C'est donc une base. Alors $|S'| = \dim(\mathcal{L}(V)) = |S|$ et $S' \subset S$, donc $S = S'$.

8°) a) Il s'agit de montrer que le centre de $\mathcal{L}(V)$ est constitué des homothéties. On peut établir ce fait en décomposant φ sur la base (f_{ij}), mais ce n'est pas très intuitif. Soit $x \in V$, non nul. Supposons que x et $\varphi(x)$ soient indépendants, et considérons un projecteur p tel que $p(\varphi(x)) = 0$ et $p(x) = x$. On a alors $\varphi(p(x)) = \varphi(x) = p(\varphi(x)) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc, pour tout vecteur x, $(x, \varphi(x))$ est lié. Ainsi, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(x) = \lambda_x x$.
Notons $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V. Alors pour $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$,
$\lambda_{e_i+e_j} = \varphi(e_i + e_j) = \lambda_{e_i} e_i + \lambda_{e_j} e_j$, donc $\lambda_{e_i} = \lambda_{e_i+e_j} = \lambda_{e_j}$, donc en posant $\lambda = \lambda_{e_1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(e_i) = \lambda e_i$. Ainsi, φ est bien une homothétie.

b) On suppose ici que $r = n$, donc tous les éléments de S sont inversibles. Leurs produits étant inversibles, ils ne sont jamais nuls, or S est stable donc ils appartiennent encore à S.
Soit $g \in S$. On peut donc définir l'application $F \ : \ f \mapsto fg$, de S dans S.
Soit $g, h \in S$ tels que $F(g) = F(h)$: $fg = fh$, or f est inversible, donc $g = h$. Ainsi, F est injective. De plus S est un ensemble de cardinal fini, donc F est une bijection de S dans S. Alors $\varphi g = \sum_{f \in S} fg = \sum_{f \in S} F(f) = \sum_{f \in S} f = \varphi$. De même on montre que $\varphi = g\varphi$ pour tout $g \in S$.

c) La question précédente entraîne que φ commute avec les éléments de S, donc avec tout endomorphisme de $\mathcal{L}(V) = \mathrm{Vect}(S)$ par linéarité, donc d'après la question a, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda I$.
D'après la question b, pour tout $g \in S$, $\lambda g = \lambda I$.
Si $\lambda \neq 0$, alors $g = I$ pour tout $g \in S$, ce qui est faux car $|S| = \dim(\mathcal{L}(V)) = n^2 \geq 4$.
Ainsi $\lambda = 0$, donc $0 = \varphi = \sum_{f \in S} f$, ce qui faux car S est libre.
Cette situation est donc impossible : les éléments d'une base stable sont tous de même rang $r < n$.

9°) a) $\diamond$ On a, pour tout $f \in S_U$, $\mathrm{Im} f = U$, donc $f \in J_U$. Ainsi, $S_U \subset J_U$, or J_U est un sous-espace vectoriel, donc $\mathrm{Vect}(S_U) \subset J_U$.
S_U étant non vide, choisissons un élément f dans S_U. Alors $\mathrm{Im}(f) = U$ et on a vu en question 2.c que $\Delta_f = J_{\mathrm{Im}(f)} = J_U$.
Soit alors $h \in J_U$; il existe donc $k \in \mathcal{L}(V)$ telle que $h = fk$, et l'on peut décomposer k selon S : $k = \sum_{g \in S} \lambda_g g$. Alors $h = \sum_{g \in S} \lambda_g fg = \sum_{\substack{g \in S \\ fg \neq 0}} \lambda_g fg$. Considérons l'un des termes de cette somme : soit $g \in S$ tel que $fg \neq 0$. S étant stable, $fg \in S$, donc en particulier, $\mathrm{rg}(fg) = r = \dim(U)$. De plus, $\mathrm{Im}(fg) \subset \mathrm{Im}(f) = U$, donc $\mathrm{Im}(fg) = U$ et $fg \in S_U$. Ainsi, h est une combinaison linéaire d'éléments de S_U : $h \in \mathrm{Vect}(S_U)$.
On a bien montré que $\mathrm{Vect}(S_U) = J_U$ par double inclusion.
$\diamond$ On a de même pour tout $f \in S^W$, $\mathrm{Ker} f = W$, d'où $\mathrm{Vect}(S^W) \subset K_W$.
S^W étant non vide, choisissons $g \in S^W$. Alors $\mathrm{Ker}(f) = W$ et on a vu en question 2.c que $\Gamma_g = K_{\mathrm{Ker}(g)} = K_W$.

Soit $h \in K_W$. Il existe $k = \sum_{g \in S} \lambda_g g$ telle que $h = kf$, d'où $h = \sum_{\substack{g \in S \\ gf \neq 0}} \lambda_g gf$.
Soit $g \in S$ tel que $gf \neq 0$. Alors $gf \in S$, donc $\mathrm{rg}(gf) = r$. Ainsi,
$\dim(\mathrm{Ker}(gf)) = n - r = \dim(W)$ et $\mathrm{Ker}(gf) \supset \mathrm{Ker}(f) = W$. On en déduit que $gf \in S^W$.
Ceci montre que $h = \sum_{\substack{g \in S \\ gf \neq 0}} \lambda_g gf \in \mathrm{Vect}(S^W)$.
On a bien montré que $\mathrm{Vect}(S^W) = K_W$ par double inclusion.
b) $(S_U)_{U \in \mathcal{J}}$ est une partition de la base S de $\mathcal{L}(V)$, donc d'après le théorème de la base adaptée à une décomposition en somme directe, $\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \mathrm{Vect}(S_U) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U$.
On peut le redémontrer : si $h \in \mathcal{L}(V)$, alors $h = \sum_{s \in S} \alpha_s s = \sum_{U \in \mathcal{J}} \sum_{s \in S_U} \alpha_s s \in \sum_{U \in \mathcal{J}} J_U$, donc $\mathcal{L}(V) = \sum_{U \in \mathcal{J}} J_U$, et si $\sum_{U \in \mathcal{J}} h_u = 0$, avec $h_u \in J_U$ pour tout $U \in \mathcal{J}$, alors en posant $h_u = \sum_{s \in S_U} \alpha_s s$, on a $0 = \sum_{s \in S} \alpha_s s$, donc pour tout $s \in S$, $\alpha_s = 0$, donc les h_u sont tous nuls : la somme est bien directe.
c) En particulier, $I \in \mathcal{L}(V)$, donc il existe $(i_U)_{U \in \mathcal{J}}$ telle que $I = \sum_{U \in \mathcal{J}} i_U$, où $i_U \in J_U$ pour tout $U \in \mathcal{J}$.
Alors, si $x \in V$, $x = I(x) = \sum_{U \in \mathcal{J}} i_U(x)$, or pour tout $U \in \mathcal{J}$, $i_U(x) \in \mathrm{Im}(i_U) = U$, donc $x \in \sum_{U \in \mathcal{J}} U$, ce qui prouve que $V = \sum_{U \in \mathcal{J}} U$. De plus,
$\dim(V) \times \sum_{U \in \mathcal{J}} \dim(U) = \sum_{U \in \mathcal{J}} \dim(J_U) = \dim\Big(\bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U\Big) = \dim(\mathcal{L}(V)) = \dim^2(V)$, or $\dim(V) \neq 0$, donc $\sum_{U \in \mathcal{J}} \dim(U) = \dim(V) = \dim\Big(\sum_{U \in \mathcal{J}} U\Big)$, ce qui d'après le cours prouve que la somme est directe.

10°) a) Par construction, la famille $(S_U \cap S^W)_{U \in \mathcal{J}}$ est une partition de S^W, donc toujours d'après le théorème de la base adaptée à une décomposition en somme directe, $K_W = \mathrm{Vect}(S^W) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W)$.
b) $S_U \subset \mathrm{Vect}(S_U) = J_U$ et $S^W \subset K_W$, donc $S_U \cap S^W \subset J_U \cap K_W$, or $J_U \cap K_W$ est un sous-espace vectoriel, donc $\mathrm{Vect}(S_U \cap S^W) \subset J_U \cap K_W$.
Réciproquement, soit $f \in J_U \cap K_W$. Alors $f \in K_W$, donc d'après la question précédente, on peut écrire f sous la forme $f = \sum_{U' \in \mathcal{J}} \sum_{s \in S_{U'} \cap S^W} \alpha_s s$. Mais $f \in J_U = \mathrm{Vect}(S_U)$, donc on peut également écrire f sous la forme $f = \sum_{s \in S_U} \beta_s s$. Ainsi, $\sum_{s \in S_U} \beta_s s = \sum_{U' \in \mathcal{J}} \sum_{s \in S_{U'} \cap S^W} \alpha_s s$,

mais S est une base, donc lorsque $U' \neq U$, $\alpha_s = 0$. Il reste $\displaystyle\sum_{s\in S_U} \beta_s s = \sum_{s\in S_U\cap S^W} \alpha_s s$, donc lorsque $s \notin S^W$, $\beta_s = 0$. Ainsi, $f = \displaystyle\sum_{s\in S_U\cap S^W} \beta_s s \in \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W)$.

11°) a) Supposons que f^2 ne soit pas nul. Alors d'après la stabilité de S, $f^2 \in S$, donc f^2 a même rang que f, et d'après la formule du rang, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ sont de même dimension, or $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f = U$ et $W = \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $\mathrm{Im}f^2 = U$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = W$. Ainsi, $f^2 \in S_U \cap S^W$.

b) $S_U \cap S^W$ n'est pas vide car il engendre un sous-espace vectoriel $J_U \cap K_W$ dont la dimension est égale, d'après la question 5.a, à $(\mathrm{dim}V - \mathrm{dim}W) \times \mathrm{dim}U = r^2 \neq 0$. Il existe donc $f \in S_U \cap S^W$.
Si $f^2 = 0$, on a $U = \mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}f = W$.
Sinon on a $U = \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$ et $W = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Il suffit donc de montrer que, dans ce cas, $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires. Soit $x \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f$. On a $x = f(y)$ et $f(x) = f^2(y) = 0$, soit $y \in \mathrm{Ker}f^2$, donc $y \in \mathrm{Ker}f$, soit $x = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$. De plus, d'après la formule du rang, $\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f) = \mathrm{dim}(V)$, donc $U \oplus W = V$.

c) Soit $W \in \mathcal{N}$. Si l'on avait $U \subset W$ pour tout $U \in \mathcal{J}$, alors $V = \displaystyle\sum_{u\in\mathcal{J}} U \subset W$, donc $r = \mathrm{dim}(V) - \mathrm{dim}(W) = 0$, ce qui est faux. Ainsi, il existe $U \in \mathcal{J}$ tel que $U \oplus W = V$.

12°) a) Pour tout $f \in J_U \cap K_W$, pour tout $x \in U$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = U$, donc l'application $\tilde{f}$ est bien définie et $\tilde{f} \in \mathcal{L}(U)$. Ainsi l'application $u \ : \ f \longmapsto \tilde{f}$ est correctement définie.
Soit $f, g \in J_U \cap K_W$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in U$,

$$\begin{aligned} u(\alpha f + g)(x) &= (\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) \\ &= \alpha u(f)(x) + u(g)(x) = (\alpha u(f) + u(g))(x), \end{aligned}$$

donc u est linéaire.
Soit $f \in J_U \cap K_W$ telle que $u(f) = 0$. Alors $f|_U = 0$, mais $\mathrm{Ker}(f) = W$, donc $f|_W = 0$, or $U \oplus W = V$, donc $f = 0$. Ceci prouve que u est injective.
D'après 5.a, $\mathrm{dim}(J_U \cap K_W) = \mathrm{dim}(U)(\mathrm{dim}(V) - \mathrm{dim}(W)) = \mathrm{dim}^2(U) = \mathrm{dim}(\mathcal{L}(U))$, donc u est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) Notons $S' = (u(f))_{f\in S_U\cap S^W}$: $S_U \cap S^W$ est une base de $J_U \cap K_W$ et u est un isomorphisme, donc S' est une base de $\mathcal{L}(U)$.
Soit $f, g \in S_U \cap S^W$ tels que $fg \neq 0$. Alors $fg \in S$, donc $\mathrm{Im}(fg)$ (resp : $\mathrm{Ker}(fg)$) a la même dimension que $\mathrm{Im}(f)$ (resp : $\mathrm{Ker}(g)$), or $\mathrm{Im}(fg) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(fg)$, donc $\mathrm{Im}(fg) = \mathrm{Im}(f) = U$ et $\mathrm{Ker}(fg) = \mathrm{Ker}(g) = W$, ce qui prouve que $fg \in S_U \cap S^W$.
On en déduit aisément que S' est une base stable de $\mathcal{L}(U)$.
Supposons que $r = \mathrm{dim}(U) \geq 2$. On peut alors appliquer à U le résultat de la question 8 : $r < \mathrm{dim}(U)$. Pourtant, on a déjà vu qu'il existe $f \in S_U \cap S^W$ et $u(f) = f|_U^{\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme d'après le cours, car U est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans V. Ainsi, $r = \mathrm{rg}(u(f)) = dim(U)$. On obtient une contradiction, donc $r = 1$.

c) D'après la question 5.a, $\dim J_U \cap K_W = r^2 = 1$, donc la base $S_U \cap S^W$, qui engendre $J_U \cap K_W$, ne peut avoir qu'un élément p, seul élément de S de noyau W et d'image U.
On a déjà vu que p^2 est soit nul, soit un élément de $S_U \cap S^W$, or $p^2 = 0 \Longrightarrow U \subset W$, ce qui est contraire aux hypothèses, donc $p^2 = p$.
Finalement, $p^2 = p$ est le projecteur de noyau W et image U.

13°) a) D'après la question 4.c, $V = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} U$,
donc $n = \dim(V) = r|\mathcal{J}| = |\mathcal{J}|$ car $r = 1$.
On a aussi $\dim K_W = n(n - \dim W) = n(n - (n-1)) = n$, ce qui impose que la base S^W de K_W possède $n = |\mathcal{N}|$ éléments.
Le nombre d'éléments de $S_U \cap S^W$ est la dimension de $J_U \cap K_W$, qui vaut 1 ici.
Ainsi, il existe dans S un et un seul élément $\varphi_{U,W}$ de noyau W et d'image U ; son carré est lui-même si U et W sont supplémentaires, autrement il est nul.

b) La composée $\varphi_{U,W} \circ \varphi_{U',W'}$ est certainement nulle si $U' = \mathrm{Im}\varphi_{U',W'} \subset W = \mathrm{Ker}\varphi_{U,W}$, et sinon, c'est que $U' \oplus W = V$; on récupère alors une application dont le noyau contient W' et l'image est incluse dans U, ce ne peut être (par stabilité) que $\varphi_{U,W'}$.

c) Soit $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{K}} W$.
Alors, pour tout $s \in S$, $x \in \mathrm{Ker}(s)$, donc $s(x) = 0$. Par combinaison linéaire, on en déduit que, pour tout $f \in \mathcal{L}(V)$, $f(x) = 0$. En particulier, $x = I(x) = 0$.
Ainsi, $\bigcap_{W \in \mathcal{K}} W = \{0\}$.

Partie III : Construction de bases stables

14°) La partie II a montré que les éléments de S sont tous de rang 1, et que leurs diverses images ont V pour somme directe. Cela nous donne immédiatement une base (e_i) de V, adaptée à cette somme directe. Pareillement, les noyaux possibles sont n hyperplans. Considérons donc n formes linéaires θ_i telles que leurs noyaux décrivent exactement $\mathcal{N}$. Pour tous i et j, il existe un et un seul élément de S d'image $\mathrm{Vect}(e_i)$ et de noyau $\mathrm{Ker}\theta_j$. Un endomorphisme de rang 1 a généralement la forme suivante : $f(x) = \theta(x)u$, θ étant une forme linéaire non nulle et u un vecteur non nul ; le noyau de f est celui de θ. Cette description permet de noter les éléments de S sous la forme φ_{ij}, avec $\varphi_{ij}(x) = \lambda_{ij}\theta_j(x)e_i$ (puisque deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles). De plus, les λ_{ij} sont non nuls. Pour simplifier ce qui suit, nous noterons $U_k = \mathrm{Vect}(e_k)$ et $W_k = \mathrm{Ker}\theta_k$.
Il reste à montrer que la famille $(\theta_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de V^* :
supposons que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \theta_j = 0$.

Alors, pour tout $x \in V$, $0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \theta_j(x) e_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{1}{\lambda_{1,j}} \varphi_{1,j}(x)$, or la famille $(\varphi_{i,j})$ est libre, donc les α_j sont tous nuls.

15°) a) Lorsque (j,k) appartient à A, e_k n'appartient pas à $\mathrm{Ker}\theta_j$, donc $U_k \oplus W_j = V$. On a alors, d'après la question 13.b : $\varphi_{ij}\varphi_{kl} = \varphi_{il}$, soit pour tout x :
$\lambda_{ij}\theta_j(\lambda_{kl}\theta_l(x)e_k) = \lambda_{il}\theta_l(x)$ ou encore $\lambda_{ij}\lambda_{kl}\theta_j(e_k)\theta_l = \lambda_{il}\theta_l$ qui entraîne (θ_l n'étant pas nulle) $\lambda_{ij}\lambda_{kl}\theta_j(e_k) = \lambda_{il}$.
θ_1 est non nul, donc quitte à modifier l'ordre de la base (e_i), on peut bien supposer que $\theta_1(e_1)$ est non nul. Ensuite, quitte à multiplier e_1 par un scalaire adapté, on peut supposer que $\theta_1(e_1) = 1$.

b) $b_j a_k \theta_j(e_k) = \lambda_{1,j}\theta_j(e_k)\lambda_{k,1} = \lambda_{1,1} = 1$, d'après la question précédente, car $(j,k) \in A$, donc $a_k b_j \neq 0$ et $\theta_j(e_k) = \dfrac{1}{a_k b_j}$.

c) Pour tout $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $a_i b_j = \lambda_{i,1}\theta_1(e_1)\lambda_{1,j} = \lambda_{i,j}$, d'après la question a, car $(1,1) \in A$.
On remplace θ_j par $\theta'_j = b_j\theta_j$ et e_k par $e'_k = a_k e_k$, ce qui n'altère pas leurs indépendances, leurs noyaux, ni les espaces engendrés puisque les a_i et b_j sont non nuls, et on a alors $\theta'_j(e'_k) = 1$ ou 0.
On a donc $\theta_j = \dfrac{1}{b_j}\theta'_j$ et $e_i = \dfrac{1}{a_i}e'_i$ d'où $\varphi_{ij}(x) = a_i b_j \dfrac{1}{b_j}\theta'_j(x)\dfrac{1}{a_i}e'_i = \theta'_j(x)e'_i$.

16°) Si Ω n'est pas inversible, ses lignes L_i vérifient une relation de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\theta_i(e_j) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\theta_i = 0$, ce qui contredit la liberté de la famille (θ_i). Ainsi, Ω est bien une matrice inversible.
Réciproquement, partons d'une base (e_i) de V et d'une matrice inversible Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont égaux à 0 ou à 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons θ_i l'unique forme linéaire sur V vérifiant : pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\theta_i(e_j) = \Omega_{i,j}$. On pose alors, pour tout $i,j \in \mathbb{N}_n$, pour tout $x \in V$, $\varphi_{i,j}(x) = \theta_j(x)e_i$.
Les questions précédentes montrent que toute base $(\varphi_{i,j})$ stable de $\mathcal{L}(V)$ est construite selon un tel procédé. Montrons que ce procédé conduit toujours à une base stable. Pour cela, il suffit de montrer avec nos notations, que $(\varphi_{i,j})$ est bien une base stable de $\mathcal{L}(V)$.
Montrons d'abord que (θ_i) est une base de V^* : supposons que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\theta_j = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\theta_j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\Omega_{j,i}$, donc ${}^t\Omega \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, or ${}^t\Omega$ est inversible, donc les α_j sont tous nuls.
Montrons ensuite que $(\varphi_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(V)$. Supposons que $\sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_{i,j}\varphi_{i,j} = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in E$, $0 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_{i,j}\theta_j(x)e_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\theta_j(x)\Big)e_i$. On en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\theta_j(x)$ pour tout $x \in E$, donc $0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\theta_j$, or la

famille (θ_j) est libre, donc tous les $\alpha_{i,j}$ sont tous nuls.
Montrons enfin que $(\varphi_{i,j})$ est stable : Soit $x \in V$.
$(\varphi_{i,j} \circ \varphi_{h,k})(x) = \varphi_{i,j}(\theta_k(x)e_h) = \theta_k(x)\theta_j(e_h)e_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_j(e_h) = 0 \\ \varphi_{i,k}(x) & \text{si } \theta_j(e_h) = 1 \end{cases}$.

17°) Choisissons une base (e_1, e_2) de V et notons (φ_{ij}) la base de $\mathcal{L}(V)$ qui lui est canoniquement associée. Posons ensuite, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $\psi_{ij} = \varphi_{i,3-j}$: (ψ_{ij}) est encore une base stable de $\mathcal{L}(V)$ car on a seulement modifié l'ordre des vecteurs de (φ_{ij}). Supposons que (ψ_{ij}) est canoniquement associée à une base de V, notée (f_1, f_2). Alors $0 = \psi_{1,2}(f_1) = \varphi_{1,1}(f_1)$, donc $f_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi_{1,1}) = \mathrm{Vect}(e_2)$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f_1 = \lambda e_2$. Alors $f_1 = \psi_{1,1}(f_1) = \varphi_{1,2}(\lambda e_2) = \lambda e_1$, donc $f_1 \in \mathrm{Vect}(e_1) \cap \mathrm{Vect}(e_2) = \{0\}$, ce qui est impossible. Ainsi, (ψ_{ij}) estune base stable de $\mathcal{L}(V)$ qui n'est pas canoniquement associée à une base de V.