DM 65 : Processus démographiques

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le mercredi 25 juin.

On désire étudier le comportement à l'infini d'un processus démographique.
A l'instant initial, la génération G_0 est constituée de N individus (N entier non nul).
Ces N individus donnent naissance à d'autres individus, leurs fils, qui constitueront la génération G_1. Cette génération donnera naissance elle aussi à une nouvelle génération G_2. On définit ainsi G_n la n-ième génération et on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus de la génération G_n.
On remarquera que si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$.
On s'intéresse à la probabilité d'extinction de l'espèce et à la variable égale au numéro de la première génération pour laquelle il n'y a plus d'individu.

On étudie 3 types de reproduction et on utilise différentes méthodes de calcul.

Préliminaires

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1°) On suppose uniquement pour cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$.
b) Vérifier que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.
On se propose de montrer que cette relation est vraie pour toute variable aléatoire X à valeurs entières.

2°) a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$.
Déduire de la question précédente que $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)\right) - nP(X > n)$.

3°) On suppose que la série $\sum P(X > k)$ est convergente.
a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. En déduire que X est d'espérance finie.
b) Montrer que $nP(X > n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

4°) En utilisant la suite double $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définie par $a_{k,n} = \begin{cases} P(X = n) & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$,
donner une seconde démonstration de la relation $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que chaque individu de la génération G_0 donne naissance à 1 individu avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et ne donne naissance à aucun enfant avec la probabilité $q = 1 - p$, et ceci indépendamment les uns des autres.
De même, s'il y a des individus à la génération G_n, chacun donne, pour la génération G_{n+1}, un enfant avec la probabilité p et 0 enfant avec la probabilité q, et ceci indépendamment les uns des autres.

5°) a) Quelle est la loi de Z_1 ?
b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, l'ensemble des valeurs prises par Z_k est égal à $\{0, \ldots, N\}$.
c) Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, Quelle est la loi conditionnelle de Z_{n+1} sachant que $Z_n = k$?
d) En numérotant de 1 à N les individus de la génération G_0, et en appelant "lignée i" les descendants de l'individu numéro i, montrer que Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p^n)$.

6°) On note E l'événement : "il y a disparition de l'espèce".
a) Ecrire E à l'aide des événements $(Z_n = 0)$.
b) Montrer que $P(E) = 1$.

7°) On appelle T la variable aléatoire égale au numéro de la première génération pour laquelle il n'y a plus d'individu.
a) A l'aide de la variable aléatoire Z_n, montrer que pour tout $n \geq 0$,
$P(T > n) = 1 - (1 - p^n)^N$.
b) Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on note T_i la variable aléatoire égale au numéro de la génération pour laquelle la lignée i s'éteint.
Quelle est la loi de T_i ?
c) Retrouver à l'aide des variables aléatoires T_i que $P(T \leq n) = (1 - p^n)^N$.
d) Donner la loi de T.

8°) a) Montrer que $P(T > n) \sim Np^n$, lorsque n tend vers $+\infty$.
b) A l'aide du préliminaire, montrer que T admet une espérance finie.
c) Montrer que $E(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - p^k}$.

Partie 2

On suppose dans cette partie que N est un entier non nul **et pair**.
Dans cette partie, chaque individu de la génération G_n donne deux enfants avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et 0 enfant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et ceci indépendamment les uns des autres.
Pour tout $n \geq 0$, on pose $a_n = 2^{n-1}N$.

9°) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble des valeurs prises par Z_n est $\{0, 2, 4, \ldots, 2a_n\}$.

10°) Montrer que, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, a_{n+1}\}$,

$$(1) \ : \ P(Z_{n+1} = 2i) = \sum_{k=0}^{a_n} \binom{2k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} P(Z_n = 2k),$$

en convenant que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{a}{b} = 0$ lorsque $b \notin \{0, \ldots, a\}$.

11°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $H_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(Z_n = 2k)x^{2k}$.

a) Que vaut $H_n(1)$?
b) Montrer que $H_0(x) = x^N$.
c) A l'aide de la relation (1) de la question précédente, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = H_n\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$.

12°) a) Montrer que $H'_n(1) = E(Z_n)$.
b) Déterminer une relation liant $E(Z_{n+1})$ et $E(Z_n)$ et en déduire $E(Z_n)$ en fonction de n.

13°) On pose $v_n = H_n(0) = P(Z_n = 0)$.
a) Par un raisonnement probabiliste, montrer que la suite (v_n) est croissante et convergente.
b) On définit la suite (w_n) par : $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{1 + w_n^2}{2}$.
Montrer que, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $H_n(w_k) = (w_{n+k})^N$.
c) Déterminer la limite de $H_n(0)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la probabilité que l'espèce s'éteigne ?

Partie 3

On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de Z_{n+1} sachant que $Z_n = k$ est la loi uniforme sur $\{0, \dots, k\}$, c'est-à-dire que :
$\forall i \in \{0, \dots, k\}$, $P(Z_{n+1} = i | Z_n = k) = \dfrac{1}{k+1}$.
En particulier la loi de Z_1 est la loi uniforme sur $\{0, \dots, N\}$.

14°) a) Quelles sont les valeurs prises par les variables Z_n pour $n \geq 1$?

b) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $P(Z_{n+1} = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k+1} P(Z_n = k)$.

15°) a) En utilisant cette dernière relation, montrer que $E(Z_{n+1}) = \dfrac{E(Z_n)}{2}$.
En déduire $E(Z_n)$ en fonction de n.
b) De même, déterminer une relation entre $E(Z_{n+1}^2)$ et $E(Z_n^2)$.
c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n E(Z_n^2)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{N}{3}$.
Déterminer u_n puis la variance de Z_n en fonction de n.

16°) a) Montrer que $E(Z_n) \geq P(Z_n \geq 1)$. En déduire que $P(Z_n = 0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
b) Quelle est la probabilité d'extinction de l'espèce ?
c) On note T la variable aléatoire égale au numéro de la première génération où s'éteint l'espèce. Montrer que T possède une espérance finie.