

Résumé de cours :  
Semaine 35, du 23 juin au 25.

## Première partie

# Les probabilités (fin)

### 1 L'espérance (fin)

**Propriété.** Inégalité triangulaire :  $X \in L^1 \iff |X| \in L^1$  et dans ce cas,  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

**Propriété de comparaison :** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète complexe et  $Y \in L^1$  telles que  $|X| \leq Y$ . Alors  $X \in L^1$ .

**Formule. Inégalité de Markov :** Si  $X \geq 0$  et  $a > 0$ , alors  $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ .

Il faut savoir le démontrer.

**Théorème.** Si  $X_1, \dots, X_k$  sont  $k$  variables aléatoires discrètes réelles d'espérances finies et **mutuellement indépendantes**, alors  $X_1 \times \dots \times X_k$  est d'espérance finie et  $E(X_1 \times \dots \times X_k) = E(X_1) \times \dots \times E(X_k)$ . La réciproque est fausse.

Il faut savoir le démontrer.

### 2 La variance

**Définition.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une variable aléatoire réelle. Si  $X^k$  est d'espérance finie, on dit que  $E(X^k)$  est le moment d'ordre  $k$  de  $X$ .

**Notation.** On note  $L^2(\Omega, P)$  l'ensemble des variables aléatoires  $X$  discrètes à valeurs réelles possédant un moment d'ordre 2, définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Lemme :** Si  $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$ , alors  $X_1 X_2 \in L^1(\Omega, P)$ .

**Corollaire.**  $L^2(\Omega, P)$  est un sous-espace vectoriel de  $L^1(\Omega, P)$ .

**Définition.** Si  $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$ , la covariance est  $Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$ .

**Propriété.**  $Cov$  est une forme bilinéaire symétrique positive sur  $L^2(\Omega, P)$ , mais ce n'est pas un produit scalaire.

**Définition.** Si  $X \in L^2(\Omega, P)$ , la variance de  $X$  est  $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$ .  
L'écart type de  $X$  est  $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ .

**Remarque.**  $Var(X) = 0$  si et seulement si  $X$  est presque sûrement constante.

**Définition.**  $X$  est réduite si et seulement si  $X \in L^2(\Omega, P)$  et  $Var(X) = 1$ .

**Propriété.** Formule de Koenig-Huygens : Si  $X \in L^2(\Omega, P)$ ,  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

Si  $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$ , alors  $Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$  : donc, si deux variables aléatoires de  $L^2(\Omega, P)$  sont indépendantes, elles sont orthogonales au sens de  $Cov$  (la réciproque est fautive).

**Propriété.** Pour  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $X \in L^2(\Omega, P)$ ,  $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ .

**Propriété.** Si  $X \in L^2(\Omega, P)$  avec  $\sigma(X) \neq 0$ , alors  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée et réduite.

**Propriété.**

◇ Si  $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$ ,  $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$ .

◇ Si  $X_1, \dots, X_k \in L^2(\Omega, P)$ ,  $Var(X_1 + \dots + X_k) = \sum_{i=1}^k Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} Cov(X_i, X_j)$ .

◇ Si  $X_1, \dots, X_k$  sont  $k$  variables aléatoires de  $L^2(\Omega, P)$  que l'on suppose **deux à deux indépendantes**, alors  $Var(X_1 + \dots + X_k) = Var(X_1) + \dots + Var(X_k)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout  $X, Y \in L^2(\Omega, P)$ ,  $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ , avec égalité ssi il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tel que  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  et  $\alpha X + \beta Y$  est presque sûrement nulle.

pour tout  $X, Y \in L^2(\Omega, P)$ ,  $Cov(X, Y)^2 \leq Var(X)Var(Y)$ , avec égalité ssi il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tel que  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  et  $\alpha X + \beta Y$  est presque sûrement constante.

**Définition.** (hors programme) : Soient  $X, Y \in L^2(\Omega, P)$  telles que  $Var(X)Var(Y) > 0$ . Le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$  est  $Corr(X, Y) \triangleq \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ .

**Propriété.**  $Corr(X, Y) \in [-1, 1]$ .

**Propriété.**  $|Corr(X, Y)| = 1$  si et seulement si il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $P(Y = aX + b) = 1$ .

**Remarque.**  $Corr(X, Y)$  indique dans quelle mesure  $Y$  dépend **linéairement** de  $X$ , mais  $Corr(X, Y)$  ne mesure pas les dépendances non linéaires (on peut avoir par exemple  $Corr(X, X^2) = 0$ ).

**Formule.** Espérance et variance pour les lois au programme.

◇ **Loi de Bernoulli** de paramètre  $p \in [0, 1]$  :  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ .

$$\boxed{E(X) = p \text{ et } Var(X) = p(1 - p)}.$$

◇ **Loi binomiale** de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$  : Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  (et  $P(X = m) = 0$  pour  $m \notin \{0, \dots, n\}$ ).

$$\boxed{E(X) = np \text{ et } Var(X) = np(1 - p)}.$$

◇ **Loi géométrique** de paramètre  $p \in ]0, 1[$  : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$  (et

$$P(X = 0) = 0). \quad \boxed{E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}}.$$

◇ **Loi de Poisson** de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ .  $E(X) = \lambda = Var(X)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

### 3 Propriétés de convergence

**Formule. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Alors, pour

$$\text{tout } \varepsilon > 0, \quad \boxed{P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}}.$$

**Il faut savoir le démontrer.**

**Définition.** (hors programme) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires et soit  $X$  une variable aléatoire.  $X_n$  converge vers  $X$  en probabilité ssi pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Théorème. Loi faible des grands nombres :**

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires dans  $L^2(\Omega, P)$  que l'on suppose toutes de même loi et deux à deux indépendantes. Posons  $\mu = E(X_n)$ , qui est indépendante de  $n$ . Alors  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à  $\mu$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Deuxième partie****Théorie de l'intégration**

**Notation.**  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ ,  $E$  est un Banach, i.e un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé complet,  $f$  est une application de  $[a, b]$  dans  $E$ .

**4 Intégration des applications en escalier****4.1 Les applications en escalier**

**Définition.** On appelle subdivision de  $[a, b]$  toute famille finie  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  de réels telle que  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ .

**Notation.** On notera  $\mathcal{S}$  l'ensemble des subdivisions de  $[a, b]$ .

**Exemple.**  $\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$ . On dit que c'est une subdivision uniforme.

**Définition.** Le pas de  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$  est  $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$ .

**Notation.** Le support de la subdivision  $\sigma$  est l'ensemble  $A(\sigma) \triangleq \{a_i / 0 \leq i \leq n\}$ .

**Propriété.** Notons  $\mathcal{P}_f([a, b])$  l'ensemble des parties finies de  $[a, b]$  contenant  $a$  et  $b$ .

$$\begin{array}{lcl} \text{L'application} & A : \mathcal{S} & \longrightarrow \mathcal{P}_f([a, b]) \\ & \sigma & \longmapsto A(\sigma) \end{array} \quad \text{est bijective.}$$

**Définition.**  $\sigma \in \mathcal{S}$  est plus fine que  $\sigma' \in \mathcal{S}$  ssi  $A(\sigma) \supseteq A(\sigma')$ . Dans ce cas, on note  $\sigma' \preceq \sigma$ .

**Propriété.**  $\preceq$  est une relation d'ordre partiel.

**Définition.** Si  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$ , on pose  $\sigma \cup \sigma' \triangleq A^{-1}(A(\sigma) \cup A(\sigma'))$  : c'est l'unique subdivision de  $[a, b]$  dont le support est la réunion des supports de  $\sigma$  et de  $\sigma'$ . C'est  $\sup\{\sigma, \sigma'\}$ .

**Définition.**  $f$  est une application en escalier sur  $[a, b]$  si et seulement s'il existe une subdivision  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $[a, b]$  telle que, pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $f$  est constante sur l'intervalle  $]a_{i-1}, a_i[$ .

**Définition.** Si  $f$  est en escalier et  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$ ,  $\sigma$  est une subdivision adaptée à  $f$  si et seulement si, pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $f$  est constante sur l'intervalle  $]a_{i-1}, a_i[$ .

**Propriété.** Les applications en escalier de  $[a, b]$  sont bornées.

**Propriété.** Soit  $f$  une application en escalier et  $\sigma$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ . Alors toute subdivision plus fine que  $\sigma$  est aussi adaptée à  $f$ .

## 4.2 Intégrale d'une application en escalier

**Définition.** Soit  $f$  une application en escalier et  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision adaptée à  $f$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ , notons  $\lambda_i$  la valeur constante de  $f$  sur  $]a_{i-1}, a_i[$ . On pose

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \lambda_i.$$

Cette quantité est indépendante du choix de  $\sigma$  parmi les subdivisions adaptées à  $f$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Remarque.** Lorsque  $E = \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b f$  représente une somme d'aires de rectangles, affectées d'un signe négatif lorsque  $\lambda_i < 0$ , donc  $\int_a^b f$  est l'aire algébrique de la surface située entre le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses.

**Propriété.** Supposons que  $f$  est en escalier et soit  $g$  une application de  $[a, b]$  dans  $E$  qui ne diffère de  $f$  qu'en un nombre fini de points de  $[a, b]$ . Alors  $g$  en escalier et  $\int_a^b g = \int_a^b f$ .

**Théorème.** Notons  $\mathcal{E}([a, b], E)$  l'ensemble des applications en escalier de  $[a, b]$  dans  $E$ . C'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et l'application  $\mathcal{E}([a, b], E) \rightarrow E$   
 $f \mapsto \int_a^b f$  est linéaire.

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** Soient  $F$  un second  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in L(E, F)$ .

Si  $f$  est en escalier,  $u \circ f$  est en escalier et  $\int_a^b u \circ f = u \left( \int_a^b f \right)$ .

**Propriété.** Si  $f$  est une application en escalier à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $\int_a^b f \geq 0$ .

**Corollaire.** Si  $f, g \in \mathcal{E}([a, b], E)$ , alors  $[\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)] \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

**Inégalité triangulaire :** Pour tout  $f \in \mathcal{E}([a, b], E)$ ,  $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$ .

**Relation de Chasles :** Soit  $f \in \mathcal{E}([a, b], E)$  et  $c \in ]a, b[$ .

Alors  $f|_{[a, c]}$  et  $f|_{[c, b]}$  sont des applications en escalier et  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

## 5 Les applications réglées

### 5.1 Définition

**Définition.** On dit que  $f : [a, b] \rightarrow E$  est réglée si et seulement si c'est la limite uniforme d'une suite d'applications en escalier, c'est-à-dire si et seulement si il existe une suite  $(f_n) \in \mathcal{E}([a, b], E)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sup_{x \in [a, b]} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On note  $\mathcal{R}([a, b], E)$  l'ensemble des applications réglées.

**Propriété.**  $\mathcal{R}([a, b], E)$  est l'adhérence de  $\mathcal{E}([a, b], E)$  dans  $(\mathcal{B}([a, b], E), \|\cdot\|_{\infty})$ .

### 5.2 Les applications continues par morceaux

**Propriété.**  $C([a, b], E) \subset \mathcal{R}([a, b], E)$  : toute application continue est réglée.

**Il faut savoir le démontrer.**

**Définition.**  $f : [a, b] \rightarrow E$  est continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $[a, b]$  telle que, pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $f|_{]a_{i-1}, a_i[}$  est prolongeable par continuité sur  $[a_{i-1}, a_i]$ , ce qui est équivalent à  $f$  est continue sur  $[a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$  et  $f$  admet en chaque  $a_i$  une limite à droite (sauf en  $b$ ) et une limite à gauche (sauf en  $a$ ). Dans ce cas, on dit que la subdivision  $\sigma$  est adaptée à  $f$ .

**Définition.** Si  $I$  est un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow E$  est continue par morceaux si et seulement si toutes ses restrictions aux segments inclus dans  $I$  sont continues par morceaux.

**Propriété.** Les applications continues par morceaux de  $[a, b]$  dans  $E$  sont réglées.

**Théorème.** (Hors programme) Une application de  $[a, b]$  dans  $E$  est réglée si et seulement si elle admet en tout point de  $[a, b]$  une limite à droite (sauf en  $b$ ) et une limite à gauche (sauf en  $a$ ).

**Corollaire.** Les applications monotones de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  sont réglées.

**Corollaire.** Le produit de deux applications réglées est réglé.

## 6 Intégration des applications réglées

### 6.1 Construction

**Définition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une application réglée.

Il existe  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], E)^{\mathbb{N}}$  telle que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_{\infty}} f$ . On pose  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Remarque.** Seule la construction de l'intégrale sur  $[a, b]$  d'une application continue par morceaux est au programme.

### 6.2 Propriétés

**Théorème.**  $\mathcal{R}([a, b], E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}([a, b], E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$  est linéaire.

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** Soit  $F$  un second  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de Banach et  $u \in L(E, F)$  que l'on suppose continue.

Si  $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$ , alors  $u \circ f \in \mathcal{R}([a, b], F)$  et  $\int_a^b u \circ f = u \left( \int_a^b f \right)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** On suppose que  $E$  est de dimension finie et que  $e = (e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$ . Notons  $f_1, \dots, f_p$  les applications coordonnées de  $f$ , de sorte que, pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t) e_j. \text{ Alors } f_1, \dots, f_p \text{ sont réglées et } \int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b f_j(t) dt \right) e_j.$$

**Remarque.** Réciproquement, si  $f_1, \dots, f_p$  sont réglées, alors  $f$  est aussi réglée.

**Propriété.** Supposons que  $E = \prod_{i=1}^p E_i$ , où pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ ,  $E_i$  est un espace de Banach. Soit

$f \in \mathcal{R}([a, b], E)$ . Notons  $f_1, \dots, f_p$  les applications composantes de  $f$ , de sorte que, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))$ . Alors  $f_1, \dots, f_p$  sont réglées et  $\int_a^b f = \left( \int_a^b f_i \right)_{1 \leq i \leq p}$ .

**Remarque.** Réciproquement, si  $f_1, \dots, f_p$  sont réglées, alors  $f$  est aussi réglée.

**Inégalité triangulaire :** Pour tout  $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$ ,  $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$ .

**Propriété.** Si  $f$  est une application réglée à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $\int_a^b f \geq 0$ .

**Corollaire.** Si  $f, g \in \mathcal{R}([a, b], E)$ , alors  $[\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)] \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$  : l'intégrale est croissante.

**Exemple.** Si  $f$  est réglée,  $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|$ .

**Propriété.** Soit  $f$  une application réglée (resp : continue par morceaux) de  $[a, b]$  dans  $E$ . Si  $g$  est une application de  $[a, b]$  dans  $E$  qui ne diffère de  $f$  qu'en un nombre fini de points de  $[a, b]$ , alors  $g$  est réglée (resp : continue par morceaux) et  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

**Relation de Chasles :** soit  $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$  et  $c \in ]a, b[$ .

Alors  $f|_{[a, c]}$  et  $f|_{[c, b]}$  sont réglées et  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**Convention :** Si  $f$  est une application définie en  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on convient  $\int_\alpha^\alpha f = 0$ .

**Convention :** Si  $f : [a, b] \rightarrow E$  est réglée, on convient que  $\int_b^a f = - \int_a^b f$ .

**Propriété.** La relation de Chasles se généralise au cas d'une application  $f$  réglée sur l'intervalle  $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$ , les réels  $(a, b, c)$  étant quelconques.

**Remarque.** Avec ces conventions, les égalités établies dans ce paragraphe restent valables, mais ce n'est pas le cas des inégalités.

## 7 Sommes de Riemann

**Notation.** On fixe une application  $f$  de  $[a, b]$  dans  $E$ .

**Définition.** On appelle subdivision pointée de  $[a, b]$  tout couple  $(\sigma, \xi)$ , où  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une subdivision de  $[a, b]$  et où  $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifie  $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ .

**Notation.** Notons  $\mathcal{S}'$  l'ensemble des subdivisions pointées de  $[a, b]$ . Si  $(\sigma, \xi) = ((a_i), (\xi_i)) \in \mathcal{S}'$ , on notera  $f_{\sigma, \xi}$  l'application en escalier définie par  $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \quad f(x) = f(\xi_i)$ ,

**Définition.** Soit  $(\sigma, \xi) = ((a_i)_{0 \leq i \leq n}, (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}) \in \mathcal{S}'$ . On appelle somme de Riemann associée à  $f$  et à  $(\sigma, \xi)$  la quantité  $S(f, \sigma, \xi) = \int_a^b f_{\sigma, \xi} = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i)$ .

**Théorème.** Si  $f$  est une application réglée de  $[a, b]$  dans  $E$ ,

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}' \quad (\delta(\sigma) \leq \alpha \implies \|S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f\| \leq \varepsilon)$ .

**À savoir démontrer lorsque  $f$  est continue.**

**Corollaire.** Soit  $(\sigma_n, \xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$  une suite de subdivisions pointées dont le pas tend vers 0. Alors, si  $f$  est réglée, la suite des sommes de Riemann associée à  $f$  et à  $(\sigma_n, \xi_n)$  converge vers  $\int_a^b f$ . Plus précisément, en notant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = (a_{i,n})_{0 \leq i \leq \varphi(n)}$  et  $\xi_n = (\xi_{i,n})_{1 \leq i \leq \varphi(n)}$ , si  $f$  est réglée et si  $\max_{1 \leq i \leq \varphi(n)} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

alors  $\sum_{i=1}^{\varphi(n)} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) f(\xi_{i,n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$ .

**Cas particulier :** si  $f$  est continue par morceaux,  $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$ .

## 8 Primitives

**Notation.** Conformément au programme officiel, on se limite au cas où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On sait alors qu'il est complet, donc c'est bien un espace de Banach.

On fixe un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et une application  $f : I \rightarrow E$ .

**Définition.**  $g : I \rightarrow E$  est une primitive de  $f$  si et seulement si  $g$  est dérivable sur  $I$  et  $g' = f$ .

**Propriété.** Si  $f$  admet une primitive  $g_0$  sur  $I$ , alors  $g$  est une primitive de  $f$  si et seulement si il existe  $k \in E$  tel que  $\forall x \in I$   $g(x) = g_0(x) + k$ .

**Propriété.** On suppose que  $f$  est réglée sur  $I$  (c'est-à-dire que les restrictions de  $f$  aux intervalles compacts inclus dans  $I$  sont réglées). Soit  $a \in I$ . Alors  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est continue sur  $I$ .

**Théorème fondamental de l'analyse :** On suppose que  $f$  est continue sur  $I$ . Soit  $a \in I$ .

Alors  $\boxed{\begin{array}{l} F : I \rightarrow E \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{array}}$  est l'unique primitive de  $f$  s'annulant en  $a$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Corollaire.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \neq b$  et  $f$  une application continue de  $[a, b]$  dans  $E$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{notation}}{=} [F(t)]_a^b$ .

**Corollaire.** Si  $f$  est une application de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ .

**Théorème.** Soit  $f$  une application de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est **continue**, positive et si  $\int_a^b f = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle sur  $[a, b]$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Définition.** Si  $f : [a, b] \rightarrow E$  est réglée, la valeur moyenne de  $f$  est  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .

**Propriété.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue,  $f$  atteint sa valeur moyenne : il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .