

Résumé de cours :

Semaine 1, du 1 au 5 septembre.

1 Fonctions et applications.

Notations : Nous emploierons dans les énoncés ci-dessous l'une des deux notations suivantes :

Notation a) : Soit D et E deux ensembles. Se donner une *application* f de D dans E , signifie que, pour tout $x \in D$, on se donne un unique $f(x) \in E$.

Notation b) : Se donner une *fonction* f d'un ensemble D dans un ensemble E signifie qu'à tout $x \in D$, on associe ou bien aucun élément de E , ou bien un unique élément de E qui est alors noté $f(x)$.

Remarque. Lorsque $D = E = \mathbb{R}$, on parle d'applications ou de fonctions *numériques*.

Définition. Sous la notation b), le domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des $x \in D$ pour lesquels la quantité $f(x)$ est *calculable*.

Définition. Soit f une application de D dans E (notation a)). Pour tout $A \subset D$, on pose $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.

Notation. Soit f une application de D dans E (notation a)). Soit D' une partie de D et E' une partie de E .

- On note $f|_{D'}$ l'application de D' dans E qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|_{D'}$ est la restriction de f à D' .
- Lorsque $f(D) \subset E'$, on note $f|^{E'}$ l'application de D dans E' qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|^{E'}$ est la corestriction de f à E' .
- Lorsque $f(D') \subset E'$, on note $f|_{D'}^{E'}$ l'application de D' dans E' qui à x associe $f(x)$.

Définition.

On se place dans le plan usuel, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que f est une application ou une fonction numérique.

La représentation graphique de f , aussi appelée le graphe de f , est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x décrit $\mathcal{D}_f$ (notation b)), ou bien lorsque x décrit D (notation a)).

Définition. Sous la notation a) ou la notation b), lorsque $y = f(x)$, avec $x \in D$ et $y \in E$,

- on dit que y est **l'image** de x par f et
- que x est **un antécédent** de y par f .

Définition. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F (notation a)).

- On dit que f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
Ainsi, f est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent.
- On dit que f est injective si et seulement si : $\forall x, y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$.
Ainsi, f est injective si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de E , leurs images sont différentes. f est injective ssi tout élément de F possède au plus un antécédent.

Définition de la composition :

- Sous la notation a) : soit $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$ deux applications. Pour tout $x \in D$, on pose $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ainsi, $g \circ f$ est une application de D dans F , appelée la composée de g et de f .
- Sous la notation b) : soit $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$ deux fonctions. Lorsque c'est possible, on pose $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: ainsi $g \circ f$ est une fonction de D dans F , appelée la composée de g et de f .

Propriété d'associativité de la composition : Sous la notation a),

soit $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow F$ et $h : F \rightarrow G$ trois applications. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Il faut savoir le démontrer.

Application réciproque :

Soit f une application d'un ensemble D dans un ensemble E (notation a)).

- On dit que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de E possède un unique antécédent. Ainsi f est bijective si et seulement si pour tout $y \in E$, il existe un unique $x_y \in D$ tel que $y = f(x_y)$.
- Dans ce cas, en notant $x_y = f^{-1}(y)$, on définit une application f^{-1} de E dans D , qui est également bijective. C'est la bijection réciproque de la bijection f .
- Lorsque f est bijective, on a $(f^{-1})^{-1} = f$. De plus $f \circ f^{-1} = Id_E$ et $f^{-1} \circ f = Id_D$, où Id_E est l'application de E dans E qui à x associe x .
- f est bijective si et seulement si il existe une application g de E dans D telle que $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_D$. Dans ce cas, $f^{-1} = g$.

2 Les fonctions numériques

Notation. Dans ce chapitre, sauf précision du contraire, f est une application ou une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

2.1 Les fonctions polynomiales

Définition. Un polynôme P (à coefficients réels) est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (notation a)) de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré de ce polynôme. On note $n = \deg(P)$.

Par convention, l'application identiquement nulle est un polynôme de degré égal à $-\infty$.

Définition. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ k réels deux à deux distincts. Alors $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k)Q(x)$.

Propriété. Soit P et Q deux polynômes. Alors l'application $x \mapsto P(x)Q(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi un polynôme, que l'on note PQ . De plus, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Théorème. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P est inférieur ou égal à n .

2.2 Premières caractéristiques d'une fonction

Définition. (Notation b))

- f est paire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f, [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(x) = f(-x)]$.
- f est impaire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f, [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(-x) = -f(x)]$.
- Soit $T > 0$. f est T -périodique si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, [x + T \in \mathcal{D}_f] \wedge f(x + T) = f(x)$.

Propriété.

- Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
- Une fonction est T -périodique si et seulement si son graphe contient son image par la translation de vecteur $T\vec{e}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. (notation a))

- f est croissante si et seulement si $\forall x, y \in D, [x \leq y \implies f(x) \leq f(y)]$.
- f est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in D, [x < y \implies f(x) < f(y)]$.
- f est décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D, [x \leq y \implies f(x) \geq f(y)]$.
- f est strictement décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D, [x < y \implies f(x) > f(y)]$.
- f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.
- f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Propriété. Graphiquement, les antécédents de λ par f sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Propriété. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq \lambda$, en l'inconnue x , sont les abscisses des points du graphe de f situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Définition. Une application $f : D \longrightarrow E$ est majorée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D, f(x) \leq M$, c'est-à-dire si et seulement si le graphe de f est situé sous la droite horizontale d'équation $y = M$.

2.3 Opérations sur les fonctions

Définition. (notation b)) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $f + g$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
On a $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- λf est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
On a $\mathcal{D}_{\lambda f} = \mathcal{D}_f$.
- fg est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
On a $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- $|f|$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$. On a $\mathcal{D}_{|f|} = \mathcal{D}_f$.
- On définit de même $f - g, \frac{1}{f}, \frac{f}{g}$.

Définition. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Propriété. Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f pour la symétrie orthogonale selon la première diagonale, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f et g deux applications définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est inférieure à g sur D , et on note $f \leq g$, lorsque : $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$.

Remarque. La notation “ $f < g$ ” désignera parfois la condition $[\forall x \in D, f(x) < g(x)]$, et d’autres fois la condition $[(f \leq g) \text{ et } (f \neq g)]$, c’est-à-dire $[\forall x \in D, f(x) \leq g(x)]$ et $[\exists x \in D, f(x) < g(x)]$.

3 Trigonométrie

3.1 Les fonctions circulaires

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{[e^z]} = [e^{\bar{z}}]$. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l’angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d’affixe z).

On pose $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$.

Ainsi $\cos(\theta)$ est l’abscisse du point $M_{e^{i\theta}}$ et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

Formules d’Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Propriété. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques. $\cos$ est paire. $\sin$ est impaire.