DM 2 : L'énigme 2022

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni jeudi 11 septembre.

En présentant ses voeux pour l'année 2022 à un ami, un mathématicien lui propose cette formule : $\dfrac{2^{32}}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{32i\theta}\ d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}(2e^{-\frac{3}{2}i\theta}-e^{-\frac{5}{2}i\theta})-2}=2022$. Mais depuis, mon ami doute de la validité de cette formule. Vrai ou faux, c'est l'objet de ce problème.

Pour ce problème, la notion de continuité pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est supposée connue. En particulier, on rappelle qu'une somme de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue et que c'est aussi le cas pour un produit ou une composée de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De même, le quotient d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par une autre fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas est une fonction continue. On rappelle également que les applications cos et sin sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. Pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, la notion de continuité n'est pas supposée connue, elle est définie ci-dessous et toute propriété relative à la continuité de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ devra être établie avant d'être utilisée.

De même, pour ce problème, la notion d'intégrale et de primitive d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est supposée connue, ainsi que ses propriétés usuelles. Pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ces notions ne sont pas supposées connues, elles sont définies ci-dessous et toute propriété relative à l'intégration ou à la primitivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ devra être établie avant d'être utilisée.

Partie 1 : intégrales de fonctions à valeurs complexes

Notation : Lorsque $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z et $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

Définition : Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b.
On suppose que f est une application de I dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est continue sur I si et seulement si les applications $t \longmapsto \mathrm{Re}(f(t))$ et $t \longmapsto \mathrm{Im}(f(t))$ sont continues sur I.
Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.

1°) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $t \longmapsto e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt$.

2°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$.
Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
Montrer que $t \longmapsto f(t) + g(t)$ est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que
$\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$.
Montrer que $t \longmapsto \alpha f(t)$ est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que
et que $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t)\, dt) = \alpha \int_a^b f(t)\, dt$.

3°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, pour toutes applications continues $f_0, \ldots, f_n$ de I dans $\mathbb{C}$, $t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k f_k(t))$ est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que
$\displaystyle\int_a^b \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k f_k(t))\, dt = \sum_{k=0}^{n} \Big[\alpha_k \int_a^b f_k(t)\, dt\Big]$.

4°) Lorsque P est un polynôme à coefficients complexes, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{it})\, dt$ en fonction des coefficients de P.

5°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$.
On suppose que pour tout $t \in I$, $g(t) \neq 0$.
Montrer que $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{g(t)}$ est une application continue de I dans $\mathbb{C}$.

6°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$, avec $a < b$.
Soit f une application continue de I dans $\mathbb{C}$.
Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\, dt\Big| = \mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t) e^{-i\theta}\, dt\Big)$.
En déduire que $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\, dt\Big| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$ (inégalité triangulaire).

Partie 2 : intégrales sur le cercle unité

On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$. $\mathbb{U}$ est ainsi le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Lorsque f est une application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $t \longmapsto f(e^{it})$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\int_{\mathbb{U}} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it}\, dt.$$

On dit que $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} f(z)\, dz$ est l'intégrale de f sur le cercle unité.

7°) Lorsque f est un polynôme à coefficients complexes, montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} f(z)\ dz = 0$.

8°) Soit $r \in \mathbb{C}$ tel que $r \neq 1$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$.

9°) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < 1$.

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{N} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} + \frac{(\frac{z_0}{z})^{N+1}}{z - z_0}$.

Montrer qu'il existe $R_N \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi + R_N$ avec $|R_N| \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On admettra que ceci prouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi$.

10°) Lorsque z_0 est un complexe tel que $|z_0| > 1$, que vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0}$?

Partie 3 : Étude d'un polynôme

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $D(z) = 4z^3 - 2z^2 - z + 1$.

11°) En étudiant les variations de l'application D restreinte à $\mathbb{R}$, montrer que D possède une unique racine réelle.

Pour toute la suite du problème, on notera z_1 l'unique racine réelle de D.

12°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$\displaystyle z^n - z_1^n = (z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k}$.
En déduire qu'il existe un polynôme P de degré 2 à coefficients réels tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $D(z) = (z - z_1)P(z)$.
Montrer que D possède 2 racines distinctes, complexes et non réelles, notées z_2 et z_3 telles que $z_3 = \overline{z_2}$.

13°) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|z_i| < 1$.

Pour toute la suite du problème, on pose $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{32i\theta}\ d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}(2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2}$

14°) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $(\cos\frac{\theta}{2})(2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2$ en fonction de D et de $e^{i\theta}$.

En déduire que I est correctement définie et mettre I sous la forme $\displaystyle I = \int_{\mathbb{U}} f(z)\ dz$, en précisant l'application f.

Partie 4 : fin du calcul

15°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels et 3 réels a_n, b_n et c_n tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n = P_n(z)D(z) + a_n z^2 + b_n z + c_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

16°) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ tels que,
pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, $\dfrac{az^2 + bz + c}{D(z)} = \dfrac{\alpha_1}{z - z_1} + \dfrac{\alpha_2}{z - z_2} + \dfrac{\alpha_3}{z - z_3}$.

17°) On admettra que $a_{34} = -\dfrac{1011}{2^{31}}$, ce que l'on obtient assez facilement à partir des relations de la question 16 avec l'aide d'un ordinateur.
Conclure.