

DM 2 : Un corrigé

Partie 1 : intégrales de fonctions à valeurs complexes

1°) \diamond Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(e^{int}) = \cos(nt)$ et $\operatorname{Im}(e^{int}) = \sin(nt)$, donc d'après l'énoncé, les applications $t \mapsto \operatorname{Re}(e^{int})$ et $t \mapsto \operatorname{Im}(e^{int})$ sont continues. Ainsi, d'après la définition de l'énoncé, l'application $t \mapsto e^{int}$ est continue sur \mathbb{R} .

\diamond D'après la définition de l'énoncé, $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt + i \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt$.

Lorsque $n \neq 0$, on obtient $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - i \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi}$,

donc $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$ lorsque $n \neq 0$.

Lorsque $n = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{int} = 1$, donc $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 2\pi$ lorsque $n = 0$.

2°) \diamond Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $f_r(t) = \operatorname{Re}(f(t))$ et $f_i(t) = \operatorname{Im}(f(t))$.

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $g_r(t) = \operatorname{Re}(g(t))$ et $g_i(t) = \operatorname{Im}(g(t))$.

Alors $\operatorname{Re}(f(t) + g(t)) = f_r(t) + g_r(t)$ et $\operatorname{Im}(f(t) + g(t)) = f_i(t) + g_i(t)$.

Ainsi, d'après les théorèmes usuels, $t \mapsto (f(t) + g(t))$ est continue.

De plus, d'après la linéarité des intégrales de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + g(t)) dt &= \int_a^b (f_r(t) + g_r(t)) dt + i \int_a^b (f_i(t) + g_i(t)) dt \\ &= \left(\int_a^b f_r(t) dt + i \int_a^b f_i(t) dt \right) + \left(\int_a^b g_r(t) dt + i \int_a^b g_i(t) dt \right) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

\diamond Posons $\alpha_r = \operatorname{Re}(\alpha)$ et $\alpha_i = \operatorname{Im}(\alpha)$.

Alors $\operatorname{Re}(\alpha f(t)) = \alpha_r f_r(t) - \alpha_i f_i(t)$ et $\operatorname{Im}(\alpha f(t)) = \alpha_r f_i(t) + \alpha_i f_r(t)$, donc toujours d'après la définition de l'énoncé, $t \mapsto \alpha f(t)$ est continue et

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(t)) dt &= \int_a^b (\alpha_r f_r(t) - \alpha_i f_i(t)) dt + i \int_a^b (\alpha_r f_i(t) + \alpha_i f_r(t)) dt \\ &= (\alpha_r + i\alpha_i) \left(\int_a^b f_r(t) dt + i \int_a^b f_i(t) dt \right) \\ &= \alpha \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :

pour tous $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, pour toutes applications continues f_0, \dots, f_n de I dans \mathbb{C} , $t \mapsto \sum_{k=0}^n (\alpha_k f_k(t))$ est continue de I dans \mathbb{C} et $\int_a^b \sum_{k=0}^n (\alpha_k f_k(t)) dt = \sum_{k=0}^n \left[\alpha_k \int_a^b f_k(t) dt \right]$.

La question précédente prouve $R(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $R(n)$ est vraie.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ et soit $n+1$ applications continues f_0, \dots, f_{n+1} de I dans \mathbb{C} .

Posons, pour tout $t \in I$, $f(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k f_k(t)$.

Alors, pour tout $t \in I$, $\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t) = f(t) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(t)$, donc d'après la ques-

tion précédente, $t \mapsto \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t)$ est continue. De plus, toujours d'après la question

précédente, $\int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha_k f_k(t)) dt = \int_a^b (f(t) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \alpha_{n+1} \int_a^b f_{n+1}(t) dt$,

puis d'après $R(n)$, $\int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha_k f_k(t)) dt = \left(\sum_{k=0}^n \left[\alpha_k \int_a^b f_k(t) dt \right] \right) + \alpha_{n+1} \int_a^b f_{n+1}(t) dt$,

donc $\int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha_k f_k(t)) dt = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\alpha_k \int_a^b f_k(t) dt \right]$. Ceci prouve $R(n+1)$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est vrai.

4°) Soit P un polynôme à coefficients complexes. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(e^{it}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{ikt}$, donc $t \mapsto P(e^{it})$ est continue d'après

les questions 1 et 3 et $\int_0^{2\pi} P(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{ikt} dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt$. Alors,

d'après la première question, $\int_0^{2\pi} P(e^{it}) dt = 2\pi \alpha_0$.

5°) On reprend les notations définies en début de question 2.

Alors, pour tout $t \in I$, $\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t)\overline{g(t)}}{|g(t)|^2} = \frac{(f_r(t) + if_i(t))(g_r(t) - ig_i(t))}{g_r^2(t) + g_i^2(t)}$,

donc $\operatorname{Re}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f_r(t)g_r(t) + f_i(t)g_i(t)}{g_r^2(t) + g_i^2(t)}$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f_i(t)g_r(t) - f_r(t)g_i(t)}{g_r^2(t) + g_i^2(t)}$. Ainsi,

d'après le cours sur les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , les applications $t \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)$

et $t \mapsto \operatorname{Im}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)$ sont continues. ce qui prouve que $t \mapsto \frac{f(t)}{g(t)}$ est une application continue de I dans \mathbb{C} .

6°) $\diamond \int_a^b f(t) dt$ est un complexe, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t) dt = e^{i\theta} \left| \int_a^b f(t) dt \right|$.

Alors d'après la question 2, $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b f(t)e^{-i\theta} dt$. Prenons la partie réelle de

cette égalité : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re}\left(\left| \int_a^b f(t) dt \right|\right) = \operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)e^{-i\theta} dt\right)$.

\diamond Or d'après l'énoncé, $\int_a^b f(t)e^{-i\theta} dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{-i\theta}) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)e^{-i\theta}) dt$,

donc $\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)e^{-i\theta} dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{-i\theta}) dt$.

Ainsi, on a prouvé que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{-i\theta}) dt$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Alors $\operatorname{Re}(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, donc par croissance de l'intégrale de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{-i\theta}) dt \leq \int_a^b |f(t)e^{-i\theta}| dt$ (l'application

$t \mapsto |f(t)e^{-i\theta}|$ est bien continue de I dans \mathbb{R} , car pour tout $t \in I$,

$|f(t)e^{-i\theta}| = |f(t)| = \sqrt{\operatorname{Re}(f(t))^2 + \operatorname{Im}(f(t))^2}$.

Finalement, $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{-i\theta}) dt \leq \int_a^b |f(t)e^{-i\theta}| dt = \int_a^b |f(t)| dt$.

Partie 2 : intégrales sur le cercle unité

Remarque : Soit f une application de \mathbb{U} dans \mathbb{C} telle que $t \mapsto f(e^{it})$ est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Alors, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f(e^{it})ie^{it} = \frac{f(t)}{-ie^{it}}$, donc d'après la question 5, $t \mapsto f(e^{it})ie^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Ceci prouve que la définition de $\int_{\mathbb{U}} f(z) dz$ proposée par l'énoncé est acceptable.

7°) Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $ie^{it} f(e^{it}) = \sum_{k=0}^n i\alpha_k e^{i(k+1)t}$. Alors, d'après

la question 4, $\int_0^{2\pi} ie^{it} f(e^{it}) dt$ est bien définie et vaut 0. En conclusion, on a montré

que $\boxed{\int_{\mathbb{U}} f(z) dz = 0}$.

8°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $(1-r) \sum_{n=0}^N r^n = \sum_{n=0}^N r^n - \sum_{n=0}^N r^{n+1} = \sum_{n=0}^N r^n - \sum_{n=1}^{N+1} r^n$,

donc $(1-r) \sum_{n=0}^N r^n = r^0 + \sum_{n=1}^N r^n - r^{N+1} - \sum_{n=1}^N r^n = 1 - r^{N+1}$, ce qu'il fallait démontrer, car $1-r \neq 0$.

9°) \diamond Soit $z \in \mathbb{U}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. $z_0 \notin \mathbb{U}$, donc $\frac{z_0}{z} \neq 1$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{z_0}{z}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{z_0}{z}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z_0}{z}}, \text{ donc } \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z_0}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \frac{\left(\frac{z_0}{z}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z_0}{z}}.$$

Ainsi, on a bien montré que $\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^N \frac{z_0^n}{z^{n+1}} + \frac{\left(\frac{z_0}{z}\right)^{N+1}}{z - z_0}$.

\diamond Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question 2, les applications $t \mapsto ie^{it}$ et $t \mapsto e^{it} - z_0$ sont continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , donc d'après la question 5, l'application $t \mapsto \frac{ie^{it}}{e^{it} - z_0}$ est

également continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Ainsi, la quantité $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0}$ est bien définie.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it} - z_0} = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^N \frac{iz_0^n}{e^{int}} + \frac{iz_0^{N+1}e^{-iNt}}{e^{it} - z_0} \right) dt$, puis

d'après la question 3, $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{n=0}^N iz_0^n \int_0^{2\pi} e^{-int} dt + R_N$, où $R_N = iz_0^{N+1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-iNt} dt}{e^{it} - z_0}$.

D'après la question 1, on en déduit que $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi + R_N$. De plus, d'après la ques-

tion 6, $|R_N| \leq |z_0|^{N+1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{-iNt}}{e^{it} - z_0} \right| dt = |z_0|^{N+1} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it} - z_0|} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, car $|z_0| < 1$

et car $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it} - z_0|}$ ne dépend pas de N .

Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $|R_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

10°) On suppose maintenant que $|z_0| > 1$. Adaptons la question précédente.

\diamond Soit $z \in \mathbb{U}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. $z_0 \notin \mathbb{U}$ et $z_0 \neq 0$, donc $\frac{z}{z_0} \neq 1$. Ainsi, d'après la question 8,

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{z_0}}, \text{ donc } \frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{z_0}\right)^n - \frac{1}{z_0} \frac{\left(\frac{z}{z_0}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{z_0}}.$$

Ainsi $\frac{1}{z - z_0} = -\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{z_0^{n+1}} + \frac{\left(\frac{z}{z_0}\right)^{N+1}}{z - z_0}$.

\diamond De même que pour la question précédente, on montre que la quantité $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0}$ est

bien définie. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors

$\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it} - z_0} = \int_0^{2\pi} \left(-\sum_{n=0}^N \frac{ie^{i(n+1)t}}{z_0^{n+1}} + \frac{ie^{i(N+2)t}}{z_0^{N+1}(e^{it} - z_0)} \right) dt$, puis d'après la

question 3, $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = - \sum_{n=0}^N \frac{i}{z_0^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt + R_N$, où $R_N = \frac{i}{z_0^{N+1}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(N+2)t} dt}{e^{it} - z_0}$.

D'après la question 1, on en déduit que $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = R_N$. De plus, d'après la question

6, $|R_N| \leq \left(\frac{1}{|z_0|}\right)^{N+1} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it} - z_0|} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, car $\frac{1}{|z_0|} < 1$.

On en déduit donc que, lorsque $|z_0| > 1$, $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$.

Partie 3 : Étude d'un polynôme

11°) D est une application dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$D'(t) = 12t^2 - 4t - 1$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

$\Delta = 16 + 4 \times 12 = 64 = 8^2$, donc les racines de D' sont

$$t_0 = \frac{4+8}{24} = \frac{1}{2} \text{ et } t_1 = \frac{4-8}{24} = -\frac{1}{6}.$$

De plus, $D(t) = t^3(4 - 2\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3})$, donc $D(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ et $D(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$.

On peut alors représenter le tableau de variations de D :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
$D'(t)$		+	o	-	o	+	
$D(t)$	$-\infty$	\nearrow	\circ	\searrow	\circ	\nearrow	$+\infty$

On calcule $D(\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{8} - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$, donc d'après le tableau de variations, D s'annule une unique fois sur \mathbb{R} en un réel $z_1 \in]-\infty, -\frac{1}{6}]$.

12°) \diamond Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} z_1^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-k},$$

$$\text{or en posant } h = k + 1, \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} z_1^{n-1-k} = \sum_{h=1}^n z^h z_1^{n-h},$$

$$\text{donc } (z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-1} z^k z_1^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} z^k z_1^{n-k} + z^n - z_1^n,$$

$$\text{donc } (z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = z^n - z_1^n.$$

\diamond Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
D(z) &= D(z) - D(z_1) \\
&= 4(z^3 - z_1^3) - 2(z^2 - z_1^2) - (z - z_1) \\
&= (z - z_1)(4(z^2 + zz_1 + z_1^2) - 2(z + z_1) - 1) \\
&= (z - z_1)P(z),
\end{aligned}$$

où P est un polynôme à coefficients réels de degré 2.

◇ Les racines de P sont des racines de D , donc P n'admet pas deux racines réelles distinctes. Ainsi, en notant Δ son discriminant, $\Delta \leq 0$. Posons $\delta = \sqrt{-\Delta}$ et notons $P = (z \mapsto az^2 + bz + c)$.

Alors on sait que les racines de P sont $z_2 = \frac{-b + i\delta}{2a}$ et $z_3 = \frac{-b - i\delta}{2a}$.

Supposons que $\delta = 0$. Alors $z_2 = z_3 \in \mathbb{R}$ et z_2 est une racine réelle de D ,

donc $z_1 = z_2 = z_3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 4(t - z_1)^2$,

puis $D(t) = (t - z_1)P(t) = 4(t - z_1)^3$. En particulier, $D'(t) = 12(t - z_1)^2$, donc z_1 est l'unique racine de D' , ce qui est faux. Ainsi, $\delta \neq 0$.

Ainsi, z_2 et z_3 sont complexes, non réelles et distinctes, et $z_3 = \overline{z_2}$.

13°) On calcule $D(-1) = -4 - 2 + 1 + 1 = -4 < 0$, donc d'après le tableau de variations, $z_1 \in]-1, -\frac{1}{6}[$ ce qui prouve déjà que $|z_1| < 1$.

De plus, $D(z) = (z - z_1)P(z)$ et z_2 et z_3 sont deux racines distinctes de P , donc $D(z) = 4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. En particulier, $1 = D(0) = -4z_1z_2z_3$, or $z_3 = \overline{z_2}$, donc

$$1 = -4z_1|z_2|^2, \text{ puis } |z_2|^2 = -\frac{1}{4z_1}.$$

Or $D\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16} - \frac{2}{16} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{-3 + 4 + 16}{16} > 0$, donc toujours d'après le tableau de variations, $z_1 \in]-1, -\frac{1}{4}[$. Ainsi, $z_1 < -\frac{1}{4}$, puis $-z_1 > \frac{1}{4}$, ce qui prouve que

$$|z_2|^2 = \frac{1}{4(-z_1)} < 1. \text{ Ceci montre que } |z_2| < 1. \text{ De plus, } z_3 = \overline{z_2}, \text{ donc } |z_3| = |z_2|.$$

On a bien montré que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $|z_i| < 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{14^\circ)} \quad \diamond \text{ Soit } \theta \in \mathbb{R}. \quad 2 \cos \frac{\theta}{2} &= e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}, \text{ donc} \\
\cos \frac{\theta}{2} (2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2 &= \frac{1}{2}(2e^{-i\theta} - e^{-2i\theta} + 2e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) - 2 \\
&= -\frac{1}{2}e^{-3i\theta}(4e^{3i\theta} - 2e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1) \\
&= -\frac{1}{2}(e^{i\theta})^{-3}D(e^{i\theta}).
\end{aligned}$$

◇ D'après la question précédente, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $D(e^{i\theta}) \neq 0$,

donc $\theta \mapsto \cos \frac{\theta}{2} (2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2$ est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} qui ne s'annule jamais.

Ses parties réelle et imaginaire sont clairement continues, donc elle est continue. De

même, l'application $\theta \mapsto e^{32i\theta}$ est continue, donc d'après la question 5, I est bien définie en tant qu'intégrale entre 0 et 2π d'une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

◇ De plus, d'après le calcul précédent,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-2e^{35i\theta} d\theta}{D(e^{i\theta})} = \int_{\mathbb{U}} f(z) dz, \text{ en posant, pour tout } z \in \mathbb{U}, \quad \boxed{f(z) = \frac{2iz^{34}}{D(z)}}.$$

Partie 4 : fin du calcul

15° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : il existe un polynôme P_n à coefficients réels et 3 réels a_n, b_n et c_n tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = P_n(z)D(z) + a_n z^2 + b_n z + c_n.$$

Pour $n = 0$, on a $z^0 = 1 = 0 \cdot D(z) + 1$, donc $R(0)$ est vraie en choisissant $P_0 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $R(n)$ est vraie. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\text{On a } z^{n+1} = z \times z^n = zP_n(z)D(z) + a_n z^3 + b_n z^2 + c_n z,$$

or $z^3 = \frac{1}{4}(D(z) + 2z^2 + z - 1)$, donc $z^{n+1} = (zP_n(z) + \frac{a_n}{4})D(z) + (\frac{a_n}{2} + b_n)z^2 + (\frac{a_n}{4} + c_n)z - \frac{a_n}{4}$, donc on a prouvé $R(n+1)$ en posant $P_{n+1}(z) = zP_n(z) + \frac{a_n}{4}$, qui est bien un polynôme

à coefficients réels, $\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n, b_{n+1} = \frac{a_n}{4} + c_n \text{ et } c_{n+1} = -\frac{a_n}{4}}$.

16° Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. En réduisant au même dénominateur,

$$\frac{\alpha_1}{z - z_1} + \frac{\alpha_2}{z - z_2} + \frac{\alpha_3}{z - z_3} \text{ est égal à } \frac{\alpha_1(z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3) + \alpha_2(z^2 - (z_1 + z_3)z + z_1 z_3) + \alpha_3(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}, \text{ or}$$

d'après la question 12, $D(z) = 4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ conviennent lorsque, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = 4 \left[(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)z^2 - (\alpha_1(z_2 + z_3) + \alpha_2(z_1 + z_3) + \alpha_3(z_1 + z_2))z + \alpha_1 z_2 z_3 + \alpha_2 z_1 z_3 + \alpha_3 z_1 z_2 \right].$$

Ainsi, pour que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ conviennent, il suffit qu'ils soient solution du système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{a}{4} \\ \alpha_1(z_2 + z_3) + \alpha_2(z_1 + z_3) + \alpha_3(z_1 + z_2) = -\frac{b}{4} \\ \alpha_1 z_2 z_3 + \alpha_2 z_1 z_3 + \alpha_3 z_1 z_2 = \frac{c}{4} \end{cases}$$

Notons (1), (2) et (3) ces trois équations.

Notons (1)' l'équation $(z_1 + z_2)(1) - (2)$,

$$\text{c'est-à-dire (1)' : } \alpha_1(z_1 - z_3) + \alpha_2(z_2 - z_3) = (z_1 + z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}$$

et de même, notons (2)' l'équation $z_1 z_2(1) - (3)$,

$$\text{c'est-à-dire (2)' : } \alpha_1 z_2(z_1 - z_3) + \alpha_2 z_1(z_2 - z_3) = z_1 z_2 \frac{a}{4} - \frac{c}{4}.$$

Comme (2) = $(z_1 + z_2)(1) - (1)'$ et (3) = $z_1 z_2(1) - (2)'$,

on voit que $(S) \iff ((1)', (2)', (1))$.

$$\text{Or (1)' } z_1 - (2)' \text{ donne } \alpha_1(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = z_1((z_1 + z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}) - z_1 z_2 \frac{a}{4} + \frac{c}{4}.$$

Or $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \neq 0$, donc

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{z_1((z_1 + z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}) - z_1 z_2 \frac{a}{4} + \frac{c}{4}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \\ \alpha_2 = \frac{-\alpha_1(z_1 - z_3) + (z_1 + z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}}{z_2 - z_3} \\ \alpha_3 = \frac{a}{4} - \alpha_1 - \alpha_2. \end{cases}$$

Ceci prouve que le système (S) possède un triplet solution $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pour lequel on

a donc que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, $\frac{az^2 + bz + c}{D(z)} = \frac{\alpha_1}{z - z_1} + \frac{\alpha_2}{z - z_2} + \frac{\alpha_3}{z - z_3}$.

17°) D'après la question 16, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $f(z) = 2iP_{34}(z) + 2i \frac{a_{34}z^2 + b_{34}z + c_{34}}{D(z)}$,

donc, en utilisant la définition de $\int_{\mathbb{U}} f(z) dz$ et la question 2,

$I = 2i \int_{\mathbb{U}} P_{34}(z) dz + 2i \int_{\mathbb{U}} \frac{a_{34}z^2 + b_{34}z + c_{34}}{D(z)} dz$. D'après la question 7, le premier terme

est nul. De plus, d'après la question précédente, il existe des complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels

que (C) : $\frac{a_{34}z^2 + b_{34}z + c_{34}}{D(z)} = \frac{\alpha_1}{z - z_1} + \frac{\alpha_2}{z - z_2} + \frac{\alpha_3}{z - z_3}$. Or z_1, z_2 et z_3 ont tous un

module strictement inférieur à 1, donc d'après la question 9,

$$I = 2i \times (2i\pi) \times (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Dans la condition (C), on remplace z par $t \in \mathbb{R}$ et on multiplie par t :

$$\frac{a_{34}t^3 + b_{34}t^2 + c_{34}t}{4t^3 - 2t^2 - t + 1} = \frac{\alpha_1 t}{t - z_1} + \frac{\alpha_2 t}{t - z_2} + \frac{\alpha_3 t}{t - z_3}, \text{ ce qui s'écrit aussi, pour } t \neq 0 :$$

$$\frac{a_{34} + b_{34}\frac{1}{t} + c_{34}\frac{1}{t^2}}{4 - 2\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}} = \frac{\alpha_1}{1 - \frac{z_1}{t}} + \frac{\alpha_2}{1 - \frac{z_2}{t}} + \frac{\alpha_3}{1 - \frac{z_3}{t}},$$

donc en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient que $\frac{a_{34}}{4} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Finalement, $I = -\pi a_{34} = \frac{1011\pi}{2^{31}}$ et il est bien vrai que $\frac{2^{32}}{\pi} I = 2022$.