

## DM 3

Dans tout le sujet,  $I$  désigne un intervalle inclus dans  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux éléments.

### Partie I : fonctions convexes

On admettra que, parce que  $I$  est un intervalle, pour tout  $x, y \in I$  et  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in I$ .

Lorsque  $f$  est une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , on rappelle que  $f$  est dite convexe sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $x, y \in I$  et  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ . On rappelle également que lorsque  $f$  est dérivable sur  $I$ ,  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ .

1°) Montrer que l'application exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2°) Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $a$  et  $b$  deux réels.

On suppose que  $f$  et  $g$  sont convexes sur  $I$  et que  $a$  et  $b$  sont positifs.

Montrer que  $af + bg$  est convexe sur  $I$ .

3°) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Soit  $\varphi$  une application continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\varphi(t) \geq 0$ .

Pour tout  $x \in I$  et  $t \in [a, b]$ ,  $f(x, t)$  désigne un réel. On suppose que,

- pour tout  $t \in [a, b]$ , l'application  $x \mapsto f(x, t)$  est convexe sur  $I$ ;
- pour tout  $x \in I$ , l'application  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $[a, b]$ .

Montrer que l'application  $x \mapsto \int_a^b f(x, t)\varphi(t) dt$  est bien définie et qu'elle est convexe sur  $I$ .

4°) Soit  $f$  une application de  $[0, 2\pi]$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on suppose de classe  $C^2$ .

On suppose également que  $f$  est convexe sur  $[0, 2\pi]$ .

Montrer que  $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt \geq 0$  (on pourra intégrer par parties).

5°) Soit  $f$  une application de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est deux fois dérivable sur  $[-1, 1]$  et que, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $2f'(x) + xf''(x) \geq 1$ .

Montrer que  $\int_{-1}^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3}$ .

6°) a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x_1, \dots, x_n \in I$ ,

pour tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$ .

6°) b) Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x_1, \dots, x_n \in I$ , pour tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$  tels que

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ . (inégalité de Jensen).

7°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n$   $n$  réels positifs ou nuls. On appelle moyenne arithmétique de  $x_1, \dots, x_n$  la quantité  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  et moyenne géométrique la quantité  $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$ . Montrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique (il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique).

8°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^n [(1 + x_k)^{\frac{1}{n}}]$ .

## Partie 2 : fonctions log-convexes

Lorsque  $f$  est une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , on dit que  $f$  est log-convexe sur  $I$  si et seulement si  $\ln \circ f$  est convexe.

9°) Montrer que l'application  $x \mapsto \frac{1}{x^3}$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

10°) Montrer que si  $f$  est log-convexe sur  $I$ , alors elle est convexe sur  $I$ .  
La réciproque est-elle vraie ?

11°) On suppose que  $f$  est une application deux fois dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les dérivées de  $f$  pour que  $f$  soit log-convexe.

Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  que l'on suppose log-convexes.

12°) Montrer que  $fg$  est log-convexe.

13°) Dédurre de la question 11 que, lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fois dérivables, alors  $f + g$  est log-convexe.

On suppose à nouveau que  $f$  est une application quelconque de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

14°) Montrer que  $f$  est log-convexe sur  $I$  si et seulement si pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto e^{ax} f(x)$  est convexe sur  $I$ .

15°) Démontrer le résultat de la question 13 sans supposer que  $f$  et  $g$  sont deux fois dérivables.

16°) Soit  $J$  un second intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux éléments.

Soit  $g$  une application de  $I$  dans  $J$  que l'on suppose convexe et  $h$  une application de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on suppose convexe et croissante.

Montrer que  $h \circ g$  est convexe.

Plus généralement, la composée de deux applications convexes est-elle toujours convexe ?

17°) Montrer que  $f$  est log-convexe sur  $I$  si et seulement si pour tout  $\alpha > 0$ ,  $x \mapsto f(x)^\alpha$  est convexe.

### Partie III : Inégalité de Hölder

On fixe un réel  $p$  dans  $]1, +\infty[$ .

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

18°) Montrer qu'il existe un unique réel  $q$  non nul tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Montrer que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ .

On note  $E$  l'ensemble des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{K}$ .

19°) Soit  $f$  et  $g$  deux éléments de  $E$ .

a) Montrer que  $\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_a^b |g(t)|^q dt$ .

b) En déduire l'inégalité de Hölder :  $\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$ .

20°) Pour tout  $f \in E$ , on note  $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ .

Montrer que, pour tout  $f, g \in E$ ,  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  (inégalité triangulaire).

21°) On suppose maintenant que  $p$  et  $q$  sont deux réels strictement positifs quelconques et on note  $r$  l'unique réel strictement positif tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ .

Montrer que, pour tout  $f, g \in E$ ,  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

22°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_1, \dots, p_n$   $n$  réels strictement positifs. On note  $r$  l'unique réel strictement positif tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ .

Montrer que, pour tout  $f_1, \dots, f_n \in E$ ,  $\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_r \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}$ .