DM 5 : Enoncé
Suite de Fibonacci

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni jeudi 18 septembre.

1 Premières propriétés

On désigne par $(F'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par les conditions suivantes : $F'_0 = 0$, $F'_1 = 1$ puis $F'_n = F'_{n-2} + F'_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.
On définit également la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions suivantes :
$F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer F_n en fonction de F'_{n+2}.

2°) **a)** Montrer qu'il existe un unique réel positif φ tel que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et donner une expression simple de φ.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.
c) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F'_n = \alpha\varphi^n + \beta\Big(\dfrac{-1}{\varphi}\Big)^n$.

3°) **a)** Exprimer $\Delta_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$ en fonction de n.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

2 Théorème de Zeckendorf (1952)

Dans toute la suite de ce problème, on dit qu'un entier f est un *nombre de Fibonacci* si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f = F_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dira que F_{n+1} est le nombre de Fibonacci *consécutif* de F_n.
L'objet de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème : Tout entier naturel se décompose de manière unique en tant que somme de nombres de Fibonacci non consécutifs, c'est-à-dire :
pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ et une unique liste de p entiers naturels $(r_1, \ldots, r_p)$ tels que $N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$ et $\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ \ r_{i-1} < r_i - 1$.

Afin que ce théorème soit vrai lorsque $N = 0$, on convient que lorsque $p = 0$, la quantité $F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$ est nulle. On dit que c'est une somme vide.
De plus, lorsque $p \in \{0, 1\}$, l'ensemble $\{2, \ldots, p\}$ est vide, donc la condition "$\forall i \in \{2, \ldots, p\}, \ \ r_{i-1} < r_i - 1$" est vraie.

4°) **a)** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$.
b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

5°) Démontrer la partie *existence* du théorème, c'est-à-dire montrer que :
pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et une liste de p entiers naturels $(r_1, \ldots, r_p)$ tels que $N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$ et $\forall i \in \{2, \ldots, p\}, \ \ r_{i-1} < r_i - 1$.

6°) Décomposer 100 sous la forme d'une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.
Montrer que 100 admet plusieurs décompositions sous la forme d'une somme de nombres de Fibonacci.

7°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, p\}, \ \ r_{i-1} < r_i - 1$.
Montrer que $F_{r_1} + \cdots + F_{r_p} < F_{r_p+1}$.

8°) Achever la démonstration du théorème.

9°) On dit que l'égalité $n = 1! \times x_1 + 2! \times x_2 + \cdots + p! \times x_p$ est une écriture factorielle de n si et seulement si $p = 0$ (auquel cas la somme est vide et vaut 0), ou bien $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$, $0 \leq x_k \leq k$ et $x_p \neq 0$.
Montrer que tout entier naturel possède une unique écriture factorielle.

3 Applications

10°) Voici 10 cartes magiques.

1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53, 56, 59, 61, 64, 67, 69, 72, 74, 77, 80, 82, 85, 88, 90, 93, 95, 98

2, 7, 10, 15, 20, 23, 28, 31, 36, 41, 44, 49, 54, 57, 62, 65, 70, 75, 78, 83, 86, 91, 96, 99

3, 4, 11, 12, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 45, 46, 50, 51, 58, 59, 66, 67, 71, 72, 79, 80, 87, 88, 92, 93, 100

5, 6, 7, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 39, 40, 41 , 52, 53, 54, 60, 61 , 62, 73, 74, 75, 81, 82, 83, 94, 95, 96

8, 9, 10, 11, 12, 29, 30, 31, 32, 33, 42, 43 , 44, 45, 46, 63, 64, 65, 66, 67, 84, 85, 86, 87, 88, 97, 98, 99, 100

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88

34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54

55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88

89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

Ces cartes permettent de faire le tour de magie suivant : demandez à l'un de vos proches de penser très fort à un nombre compris entre 1 et 100, sans le divulguer. Demandez-lui de cocher les cartes magiques qui contiennent ce nombre. Après un effort de concentration théâtral, vous pouvez deviner ce nombre. Comment et pourquoi ?

Considérons maintenant le jeu suivant :
On dispose N pièces de monnaie sur une table (par exemple $N = 25$).
Le joueur numéro 1 commence et prend autant de pièces qu'il veut, à condition d'en prendre au moins une et d'en laisser au moins une.
Les deux joueurs jouent à tour de rôle.

Lorsque c'est son tour, chaque joueur prend au moins une pièce et au plus le double des pièces prises par l'autre joueur au tour précédent.
Celui qui prend la dernière pièce remporte la partie.
Voici un exemple de partie, avec $N = 25$.

- Le joueur 1 prend 6 pièces. Il en reste 19.
- Le joueur 2 peut en prendre au plus $2 \times 6 = 12$. Il en choisit 5. Il en reste donc 14.
- Le joueur 1 peut prendre jusqu'à $2 \times 5 = 10$ pièces. Il en choisit 4. Il en reste donc 10.
- Le joueur 2 peut en prendre au plus $2 \times 4 = 8$. Il en prend 3. Il en reste 7.
- Le joueur 1 peut en prendre au maximum 6. Il en prend 2. Il en reste 5.
- Le joueur 2 peut prendre au plus 4 pièces. Il en choisit 1. Il en reste 4.
- Le joueur 1 comprend que s'il prend deux pièces, il perdra. Il en prend une seule. Il en reste 3.
- Le joueur 2 comprend que s'il prend une ou deux pièces, il perd. Il n'en prend qu'une. Il en reste 2 et le joueur 1 prend les deux restantes et gagne.

L'objet de cette fin de problème est de définir une stratégie gagnante pour le joueur 1 si N n'est pas un nombre de Fibonacci.

11°) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$.
Montrer que F_n est le nombre de Fibonacci consécutif de F_m
si et seulement si $F_n \leq 2F_m$.
Préciser pour quels entiers m et n on a $F_n = 2F_m$.

12°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
D'après la première partie, il existe une unique écriture de N sous la forme
$N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$, où $p \in \mathbb{N}^*$, $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ avec $\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ \ r_{i-1} < r_i - 1$.
Montrer que si $p \geq 2$, alors $N - F_{r_1} > 2F_{r_1}$.

13°) Avec les notations de la question précédente, montrer que si $p \geq 3$, alors pour tout $r \in \{1, \ldots, 2F_{r_1}\}$, $N - F_{r_1} - r$ n'est pas un nombre de Fibonacci.

14°) On suppose que $N = F_{r_1} + F_{r_2}$ avec $0 \leq r_1 < r_2 - 1$. Soit $r \in \{1, \ldots, 2F_{r_1}\}$.
Montrer que $N - F_{r_1} - r$ n'est pas un nombre de Fibonacci ou bien que c'est un nombre de Fibonacci inférieur ou égal à $2r$.

15°) On suppose que $N \in \mathbb{N}^*$ et que $N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$, où $p \geq 2$, $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ avec $\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ \ r_{i-1} < r_i - 1$.
Soit $r \in \{1, \ldots, 2F_{r_1}\}$. On pose $N' = N - F_{r_1} - r$ et on suppose que N' n'est pas un nombre de Fibonacci. Il existe donc $q \geq 2$ et $s_1, \ldots, s_q$ tels que $N' = F_{s_1} + \cdots + F_{s_q}$ et, pour tout $i \in \{2, \ldots, q\}$, $s_{i-1} < s_i - 1$.
Montrer que $F_{s_1} \leq 2r$.

16°) On suppose que N n'est pas un nombre de Fibonacci. Déduire des questions précédentes une stratégie permettant au joueur 1 de gagner à coup sûr.