DM 5 : un corrigé
Suite de Fibonacci

1 Premières propriétés

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $F_n = F'_{n+2}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $F_0 = 1$ et $F'_2 = F'_0 + F'_1 = 1$, donc $R(0)$ est vraie.
Pour $n = 1$, $F_1 = 2$ et $F'_3 = F'_1 + F'_2 = 2$, donc $R(1)$ est vraie.
Hérédité : Pour $n \geq 2$, supposons $R(n-1)$ et $R(n-2)$.
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,
$F_n = F'_{n+1} + F'_n = F'_{n+2}$, ce qui prouve $R(n)$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = F'_{n+2}$.

2°) **a)** Il s'agit d'une équation de degré 2 en l'inconnue φ. Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Longleftrightarrow \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mais $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique réel positif φ tel que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.
b) On sait que $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc en multipliant par φ^n, on obtient la relation demandée.

c) Recherchons déjà $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la relation $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\Big(\frac{-1}{\varphi}\Big)^n$ soit vraie pour $n = 0$ et $n = 1$: il suffit que $(C)\ :\ 0 = \alpha + \beta$ et $1 = \alpha\varphi - \frac{\beta}{\varphi}$.
$(C) \Longleftrightarrow \beta = -\alpha$ et $\alpha(\varphi + \frac{1}{\varphi}) = 1$.
Or la seconde racine de l'équation de la première question est
$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} = -\frac{1}{\varphi}$, donc $(C) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = -\beta$.
De plus, on vient de voir que $(-\frac{1}{\varphi})^2 = (-\frac{1}{\varphi}) + 1$, donc de même que lors de la question précédente, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Big(\frac{-1}{\varphi}\Big)^{n+2} = \Big(\frac{-1}{\varphi}\Big)^{n+1} + \Big(\frac{-1}{\varphi}\Big)^{n}$.
Ceci va nous permettre de montrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $R(n)\ :\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \Big(\frac{-1}{\varphi}\Big)^n\right)$.
Initialisation : La condition (C) étant vérifiée, $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.
Hérédité : Pour $n \geq 2$, supposons $R(n-1)$ et $R(n-2)$.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-2} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n}\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve $R(n)$.

3°) **a)** Les premières valeurs de Δ_n permettent de conjecturer que $\Delta_n = (-1)^{n+1}$. Démontrons-le par récurrence.
Pour $n = 0$, $\Delta_0 = F_0F_2 - F_1^2 = 3 - 4 = -1$, d'où $R(0)$.
Soit $n \geq 0$. On suppose $R(n)$.
$\Delta_{n+1} + \Delta_n = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2$, mais $F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2}$, donc $\Delta_{n+1} + \Delta_n = F_nF_{n+2} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2 = (F_n + F_{n+1})F_{n+2} - F_{n+2}^2 = 0$.
Ainsi $\Delta_{n+1} = -\Delta_n = (-1)^{n+2}$, ce qui prouve $R(n+1)$.
b) On note $R(n)$ l'assertion suivante : F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
Pour $n = 0$, 1 est bien le seul diviseur commun de 1 et 2, d'où $R(0)$.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$.
Soit $d \in \mathbb{N}$. Si d est un diviseur commun de F_{n+2} et de F_{n+1}, alors c'est un diviseur commun de F_{n+1} et de $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $d = 1$. Ceci prouve $R(n+1)$.

2 Théorème de Zeckendorf (1952)

4°) **a)** Notons $R(n)$ l'assertion : $x_n \geq n$.
$x_0 \in \mathbb{N}$, d'où $R(0)$.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. Alors $x_{n+1} > x_n \geq n$, or x_{n+1} et n sont entiers, donc $x_{n+1} \geq n + 1$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$.

b) Notons $S(n)$ l'assertion : $F_n > 0$.
On vérifie $S(0)$ et $S(1)$ et, pour $n \geq 0$, si $R(n)$ et $R(n+1)$ sont vraies,
alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > 0$, donc $R(n+2)$ est vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n > 0$.
Alors, pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} > 0$, donc $F_n < F_{n+1}$. De plus $F_0 < F_1$, donc la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

5°) Notons $R(N)$ la propriété à démontrer.
$\diamond$ Pour $N = 1$, $1 = F_0$, d'où $R(1)$.
$\diamond$ Pour $N \geq 1$, supposons $R(k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ et montrons $R(N+1)$.
Si $N + 1$ est un nombre de Fibonacci, $N + 1$ est bien une somme de nombres non consécutifs de Fibonacci.

Supposons maintenant que $N+1$ n'est pas un nombre de Fibonacci.
L'ensemble $\{h \in \mathbb{N}/F_h \leq N\}$ est non vide, car $F_0 \leq N$, et majoré par N d'après les questions 1 et 2. D'après le cours, cet ensemble possède donc un maximum que nous noterons k. On a $F_k < N+1 < F_{k+1}$, car $N+1$ n'est pas un nombre de Fibonacci.
Posons $M = (N+1) - F_k$. Alors $1 \leq M \leq N$, donc on peut appliquer $R(M)$; il existe $r_1, \ldots, r_p$ tels que $M = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$ et pour tout $i \in \{2, \ldots, p\}$, $r_{i-1} < r_i - 1$.
On a donc $N+1 = F_k + M = F_k + F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$, donc il reste à montrer que $r_p < k-1$.
Mais $F_k + M = N+1 < F_{k+1}$, donc $M < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$, or $F_{r_p} \leq M$, donc $F_{r_p} < F_{k-1}$, puis $r_p < k-1$ d'après la question 4.b.
Ceci démontre $R(N+1)$.

6°) La question précédente est constructive, car elle fournit un algorithme pour calculer $r_1, \ldots, r_p$; r_p est simplement le plus grand entier tel que $F_{r_p} \leq N$. Il s'agit donc d'un algorithme glouton.
Pour l'appliquer à $N = 100$, on commence par calculer les nombres de Fibonacci inférieurs à 100 :
$F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $F_4 = 8$, $F_5 = 13$, $F_6 = 21$, $F_7 = 34$, $F_8 = 55$, $F_9 = 89$.
Alors $100 = F_9 + 11 = F_9 + F_4 + 3 = F_9 + F_4 + F_2$.
Si l'on n'impose plus aux termes d'être non consécutifs, il n'y a pas unicité car par exemple $100 = 89 + 8 + 2 + 1 = F_9 + F_4 + F_1 + F_0$
ou même $100 = 55 + 34 + 8 + 3 = F_8 + F_7 + F_4 + F_2$.

7°) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $S(p)$ la propriété : pour tout $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ r_{i-1} < r_i - 1$, on a $F_{r_1} + \cdots + F_{r_p} < F_{r_p+1}$.
Si $p = 1$: pour tout $r_1 \in \mathbb{N}$, $F_{r_1} < F_{r_1+1}$, d'où $S(1)$.
Pour $p \geq 2$, supposons $R(p-1)$.
Soit $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ r_{i-1} < r_i - 1$.
Alors $F_{r_1} + \cdots + F_{r_{p-1}} < F_{r_{p-1}+1} \leq F_{r_p - 1}$, car $r_{p-1} < r_p - 1$,
donc $F_{r_1} + \cdots F_{r_p} < F_{r_p-1} + F_{r_p} = F_{r_p+1}$, d'où $S(p)$.

8°) Il reste à démontrer l'unicité.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $S(N)$ la propriété d'unicité : il existe au plus un entier $p \in \mathbb{N}$, et $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{N}^p$, tels que $[N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}] \ \wedge [\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ r_{i-1} < r_i - 1]$.
Pour $N = 0$, les éléments de la suite (F_n) étant strictement positifs, la seule écriture possible pour $N = 0$ est une somme vide.
Pour $N \geq 1$, supposons $R(k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.
Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$, $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, p\},\ r_{i-1} < r_i - 1$, $s_1, \ldots, s_q \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, q\},\ s_{i-1} < s_i - 1$,
avec $N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p} = F_{s_1} + \cdots + F_{s_q}$.
Si $r_p < s_q$, alors $N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p} < F_{r_p+1} \leq F_{s_q} \leq F_{s_1} + \cdots + F_{s_q} = N$, ce qui est faux. Ainsi, $r_p \geq s_q$. De la même façon, on démontre que $r_p \leq s_q$. Ainsi, $r_p = s_q$.
Ainsi, $N - F_{r_p} = F_{r_1} + \cdots + F_{r_{p-1}} = F_{s_1} + \cdots + F_{s_{q-1}}$, ces dernières sommes étant éventuellement vides. $N - F_{r_p} \leq N - 1$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $p = q$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $r_i = s_i$.

Ceci démontre $R(N)$.

9°) *Existence :*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion selon laquelle l'entier n admet une écriture factorielle.
Pour $n = 0$, on prend $p = 0$, en convenant qu'une somme vide est nulle.
Ceci montre $R(0)$.
Pour $n \geq 0$, on suppose $R(k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrons $R(n+1)$.
$\{m \in \mathbb{N}/m! \leq n+1\}$ est non vide et majoré par $n+1$, donc il admet un maximum noté p. Ainsi, $p! \leq n+1 < (p+1)!$.
$\{x \in \mathbb{N}^*/p!x \leq n+1\}$ est non vide et majoré par p, donc il admet un maximum noté x_p, avec $1 \leq x_p \leq p$. Ainsi, $p!x_p \leq n+1 < p!(x_p+1)$.
On a $0 \leq n+1-p!x_p < p! \leq n+1$, donc on peut utiliser $R(h)$ avec $h = n+1-p!x_p$: il existe $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_q \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$ tels que $h = \sum_{k=1}^{q} k!x_k$.
$q! \leq q!x_q \leq h < p!$, donc $q < p$. Or $n+1 = h + p!x_p$, d'où $R(n+1)$.
On a donc montré l'existence.

Pour établir l'unicité, commençons par le lemme suivant :
Lemme :
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$, $\sum_{k=1}^{p} k!x_k \leq (p+1)!-1$, avec égalité lorsque pour tout k, $x_k = k$.
Démonstration du lemme : par récurrence sur p : C'est clair pour $p = 0$. On suppose le lemme démontré pour $p \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=1}^{p+1} k!x_k \leq (p+1)!-1+(p+1)!(p+1) = (p+2)!-1$.
De plus, lorsque pour tout k, $x_k = k$,
alors $\sum_{k=1}^{p+1} k!x_k = (p+1)!-1+(p+1)!(p+1) = (p+2)!-1$.
On a bien montré $R(p+1)$.

Démonstration de l'unicité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n possède deux écritures factorielles :
$n = \sum_{k=1}^{p} x_k k! = \sum_{h=1}^{q} h!y_h$.

Si $q < p$, alors d'après le lemme, $n = \sum_{h=1}^{q} h!y_h < (q+1)! \leq p! \leq n$, ce qui est faux. On raisonne de même si $p < q$, donc $p = q$.
Si maintenant $x_p < y_p$, alors $n = \sum_{k=1}^{p} x_k k! < p!+p!x_p = p!(x_p+1) \leq p!y_p \leq n$, ce qui est faux, donc $x_p = y_p$, puis on conclut en inscrivant ceci dans le cadre d'une récurrence forte sur n. Pour l'initialisation, lorsque $n = 0$, dès qu'une écriture factorielle est

une somme non vide, elle contient un terme strictement positif, donc la seule écriture factorielle pour $n = 0$ est obtenue avec $p = 0$ et lorsque $n = 1$, l'écriture factorielle de 1 ne peut accepter aucun terme supérieur à 2, donc la seule écriture factorielle de $n = 1$ est obtenue avec $p = 1$.

3 Applications

10°) Les premiers nombres des cartes sont 1,2,3,5,8,13,21,34,55 et 89. ce sont les éléments de la suite de Fibonacci inférieurs à 100.
On décompose selon le théorème de Zeckendorf chaque nombre compris entre 1 et 100, et on l'inscrit dans chacune des cartes dont le premier nombre est un nombre de Fibonacci de cette décomposition. Ainsi, chaque nombre compris entre 1 et 100 est égal à la somme des premiers nombres des cartes le contenant. Cela permet de réaliser facilement le tour de magie décrit par l'énoncé.

11°) Supposons d'abord que F_n est consécutif de F_m.
Si $m \geq 1$, alors $F_n = F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$, donc $F_n < F_m + F_m = 2F_m$.
Lorsque $m = 0$, $F_n = F_1 = 2 = 2F_0$: il y a égalité entre F_n et $2F_m$.
◇ Supposons que F_n n'est pas consécutif de F_m. Ainsi $n \geq m + 2$.
Alors $2F_m < F_m + F_{m+1} = F_{m+2} \leq F_n$, donc $2F_m < F_n$.

En conclusion, F_n est consécutif de F_m si et seulement si $F_n \leq 2F_m$. De plus on a toujours $F_n \neq 2F_m$, sauf lorsque $n = m + 1 = 1$.

12°) On suppose que $p \geq 2$, c'est-à-dire que N n'est pas un nombre de Fibonacci.
$N - F_{r_1} = F_{r_2} + \cdots + F_{r_p} \geq F_{r_2} > 2F_{r_1}$ d'après la question précédente.

13°) D'après la question 11, $r \leq 2F_{r_1} < F_{r_2}$, donc $F_{r_2} - r > 0$. Ainsi,
$N - F_{r_1} - r = (F_{r_2} - r) + F_{r_3} + \cdots + F_{r_p} > F_{r_p}$, car $p \geq 3$.
Par ailleurs, d'après la question 7, $N - F_{r_1} - r \leq F_{r_2} + F_{r_3} + \cdots + F_{r_p} < F_{r_p+1}$, donc $F_{r_p} < N - F_{r_1} - r < F_{r_p+1}$, ce qui prouve la question.

14°) Supposons que $N - F_{r_1} - r$ est un nombre de Fibonacci et montrons qu'alors $N - F_{r_1} - r \leq 2r$.
$r \geq 1$, donc $F_{r_2} - r < F_{r_2}$, mais $N - F_{r_1} - r = F_{r_2} - r$ est un nombre de Fibonacci, donc $F_{r_2} - r \leq F_{r_2-1}$.
Ainsi, $r \geq F_{r_2} - F_{r_2-1} = F_{r_2-2}$ (on a bien $r_2 \geq 2$).
On en déduit que $2r \geq 2F_{r_2-2} \geq F_{r_2-1}$ d'après la question 11,
mais $F_{r_2-1} \geq F_{r_2} - r$, donc $2r \geq F_{r_2} - r = N - F_{r_1} - r$, ce qu'il fallait démontrer.

15°)
◇ **Lemme :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$, $t_{i-1} < t_i - 1$.

Alors $F_{t_1-1} + \sum_{j=1}^{k} F_{t_j} \leq F_{t_k+1}$.

Démonstration.
Notons $R(k)$ cette propriété.
Pour $k = 1$, soit $t_1 \in \mathbb{N}^*$. Alors $F_{t_1-1} + F_{t_1} = F_{t_1+1}$, d'où $R(1)$.
Pour $k \geq 2$, supposons $R(k-1)$.
Soit $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \in \{2, \ldots, k\},\ \ t_{i-1} < t_i - 1$. D'après $R(k-1)$,
$F_{t_1-1} + \sum_{j=1}^{k} F_{t_j} = F_{t_k} + F_{t_1-1} + \sum_{j=1}^{k-1} F_{t_j} \leq F_{t_k} + F_{t_{k-1}+1} \leq F_{t_k} + F_{t_k-1} = F_{t_k+1}$. □

◇ Supposons que $p \geq 3$: $N' = F_{r_p} + \cdots + F_{r_3} + (F_{r_2} - r)$.
D'après la question 8, $r \leq 2F_{r_1} < F_{r_2}$, donc $F_{r_2} - r \geq 1$. La décomposition selon le théorème de Zeckendorf de $F_{r_2} - r$ s'écrit $F_{r_2} - r = F_{t_1} + \cdots + F_{t_k}$ où $k \geq 1$ et pour tout $i \in \{2, \ldots, k\}$, $t_{i-1} < t_i - 1$.
De plus, $F_{r_2} - r < F_{r_2} < F_{r_3-1}$, donc $F_{t_k} \leq F_{r_2} - r < F_{r_3-1}$, puis $t_k < r_3 - 1$. Ainsi l'écriture $N' = (F_{r_p} + \cdots + F_{r_3}) + (F_{t_k} + \cdots + F_{t_1})$ est la décomposition de Zeckendorf de N' (on utilise la partie unicité du théorème), car c'est une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.
Si $p = 2$, c'est encore vrai en convenant que $F_{r_p} + \cdots + F_{r_3} = 0$.
On a donc montré que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $t_i = s_i$.
Ainsi, $r = F_{r_2} - F_{s_k} - \cdots - F_{s_1}$.
Si $s_1 = 0$, alors on a bien $F_{s_1} = 1 \leq 2r$ car $r \geq 1$.
Supposons maintenant que $s_1 \geq 1$. Alors d'après le lemme,
$r - F_{s_1-1} = F_{r_2} - \left(\sum_{j=1}^{k} F_{s_j}\right) - F_{s_1-1} \geq F_{r_2} - F_{s_k+1}$, mais $F_{s_k} \leq F_{r_2} - r < F_{r_2}$, donc $s_k < r_2$, puis $s_k + 1 \leq r_2$. Ainsi, $r - F_{s_1-1} \geq 0$.
D'après la question 11, on en déduit que $F_{s_1} \leq 2F_{s_1-1} \leq 2r$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) Lorsque c'est son tour, le joueur 1 doit, pour être certain de gagner, retirer un nombre de pièces égal au plus petit terme de la décomposition de Zeckendorf du nombre de pièces restantes.
Montrons qu'avec cette stratégie, le joueur 1 est effectivement certain de gagner.
Initialement, N n'est pas un nombre de Fibonacci, donc sa décomposition de Zeckendorf s'écrit $N = F_{r_1} + \cdots + F_{r_p}$ avec $p \geq 2$.
Il prend F_{r_1} pièces. Il en reste $N - F_{r_1}$, or d'après la question 12, $N - F_{r_1} > 2F_{r_1}$, donc le joueur 2 ne peut gagner au coup suivant. Il retire r pièces avec, selon les règles du jeu, $1 \leq r \leq 2F_{r_1}$.
C'est à nouveau le tour du joueur 1.
Le nombre de pièces sur la table vaut $N' = N - F_{r_1} - r$.
Si N' est un nombre de Fibonacci, d'après les questions 13 et 14, c'est que $p = 2$ et dans ce cas, $N' \leq 2r$, donc le joueur 1 a le droit de retirer toutes les pièces et il gagne.
Si N' n'est pas un nombre de Fibonacci, d'après la question 15, la décomposition de Zeckendorf de N' a pour plus petit terme $F_{s_1} \leq 2r$. Ainsi, le joueur 1 peut appliquer la stratégie indiquée et retirer F_{s_1} pièces de la table. Cela signifie qu'on est exactement dans la même situation qu'en début de jeu, mais en remplaçant N par N' avec $N' < N$.

Renommons $N = N_0$, $N' = N_1$ et désignons plus généralement par N_j le nombre de pièces restant sur la table juste avant que le joueur 1 ne joue pour la $j$ème fois, au cas où la partie va jusque là. On a donc $0 < N_j < \cdots < N_1 < N_0 = N$.
Comme en question 4, on peut montrer par récurrence descendante que, pour tout j, $N_j \leq N - j$. On en déduit que $j \leq N$, c'est-à-dire que la partie se termine nécessairement. Dans tous les cas, c'est le joueur 1 qui l'emporte.

Ce problème est issue du blog "Blogdemaths", très bien fait,
à l'adresse https ://blogdemaths.wordpress.com.
Le jeu en question s'appelle le jeu de Nim Fibonacci, on peut y jouer à l'adresse
http ://jeux-et-mathematiques.davalan.org/jeux/nim/fibonacci/index.html