

Résumé de cours :
Semaine 3, du 15 au 19 septembre.

Intégration et dérivation (fin)

1 Etude d'une fonction (suite)

1.1 Etude des branches infinies

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$.

1. S'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \mu$, on dit que le graphe de f admet une direction asymptotique de pente μ .
 - S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - \mu x \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \alpha$, la droite affine d'équation $y = \mu x + \alpha$ est une asymptote de la courbe au voisinage de $\varepsilon\infty$.
 - Si $f(x) - \mu x \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$, on dit que le graphe de f présente au voisinage de $\varepsilon\infty$ une branche parabolique de pente μ .

En particulier, lorsque $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} 0$, on est en présence d'une branche parabolique horizontale.

- Autres cas : il y a seulement une direction asymptotique.
2. Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique verticale.
 3. Autres cas : on ne peut rien dire.

2 Déformations du graphe

Notation. f désigne une fonction de D dans \mathbb{R} , où $D \subset \mathbb{R}$.

Propriété. On fixe un réel a .

- Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$. **A savoir établir.**
- Le graphe de $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$, qui correspond, en identifiant un point avec le couple de ses coordonnées, à la transformation $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, y)$ (**A savoir établir**). Ceci a pour effet,
 - lorsque $a > 1$, d'écraser le graphe de f d'un facteur a vers l'axe des ordonnées, parallèlement à l'axe Ox ,
 - lorsque $0 < a < 1$, d'étirer le graphe de f d'un facteur $\frac{1}{a}$ autour de l'axe Oy , parallèlement à l'axe Ox .

- Le graphe de $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a , i.e par la transformation $(x, y) \mapsto (x, ay)$.

3 Trigonométrie hyperbolique

Définition. On définit les fonctions usuelles suivantes :

- cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- sinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- tangente hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Propriété. Les fonctions sh , ch et th sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$.

Il faut connaître les graphes de sh , ch et th .

Toute formule de la trigonométrie circulaire est associée avec une formule duale de la trigonométrie hyperbolique. Cependant, le programme officiel se limite à la formule suivante :

Formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$.

Mais il n'est pas interdit de connaître quelques formules de trigonométrie hyperbolique :

- $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{cha}.\operatorname{ch}b + \operatorname{sha}.\operatorname{sh}b$,
- $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sha}.\operatorname{ch}b + \operatorname{cha}.\operatorname{sh}b$,
- $\operatorname{ch}^2a = \frac{\operatorname{ch}(2a) + 1}{2}$, $\operatorname{sh}^2a = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{2} \geq 0$.

4 Applications trigonométriques réciproques

Les graphes des fonctions usuelles de ce chapitre sont à connaître.

4.1 Trigonométrie circulaire

La fonction arcsin : l'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, continue et strictement croissante. On note \arcsin son application réciproque, de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est continue, impaire et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

La restriction de \sin à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un C^∞ -difféomorphisme sur $] -1, 1[$, dont le C^∞ -difféomorphisme réciproque est la restriction de \arcsin à $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos : l'application $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, continue et strictement décroissante. On note \arccos son application réciproque, de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$. Elle est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

La restriction de \cos à $]0, \pi[$ est un C^∞ -difféomorphisme sur $] -1, 1[$, dont le C^∞ -difféomorphisme réciproque est la restriction de \arccos à $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété. $\forall t \in [-1, 1]$ $\cos(\arccos t) = t$ et $\sin(\arcsin t) = t$, mais en général, $\arccos(\cos t) \neq t$. Plus précisément, $\arccos(\cos t) = t \iff t \in [0, \pi]$.

Ainsi, lorsque $t \notin [0, \pi]$, $\arccos(\cos t) = t_0$ où $t_0 \in [0, \pi]$ et $\cos t = \cos t_0$.

La fonction arctan : l'application $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est un C^∞ -difféomorphisme strictement croissant, dont le C^∞ -difféomorphisme réciproque est noté.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4.2 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions réciproques des fonctions ch, sh et th ne sont pas au programme.

La fonction argsh : sh est un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont le difféomorphisme réciproque est noté argsh ("argument sinus hyperbolique"). Ainsi argsh est une application C^∞ , impaire, strictement croissante. $\argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

A savoir établir : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\argsh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

La fonction argch : L'application ch est une bijection continue strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$. Son application réciproque est notée argch. C'est une bijection continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ .

ch est un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R}_+^* dans $]1, +\infty[$, donc argch est C^∞ sur $]1, +\infty[$.

$\argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\argch x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

La fonction argth : th est un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} dans $] -1, 1[$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argth. Ainsi argth est une application C^∞ , impaire, strictement croissante de $] -1, 1[$ dans \mathbb{R} . $\argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\argth x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

5 Calculs d'intégrales

5.1 Changement de variables

Théorème. On suppose que f est une application continue d'un intervalle I dans \mathbb{R} , et que φ est une application de classe C^1 d'un intervalle J dans I . Alors,

$$\forall (\alpha, \beta) \in J^2 \quad \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.} \quad (1)$$

Lorsque l'on remplace un membre de cette égalité par l'autre, on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Démonstration à connaître.

Propriété. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une application continue sur $[-a, a]$.

Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$. Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Théorème. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est une fonction continue et T -périodique définie sur \mathbb{R} .

Alors, $\forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \int_0^T f(t) dt = \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$.

Démonstration à connaître.

5.2 Intégration par parties

Théorème. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$.

Démonstration à connaître.

Théorème. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Alors, $\int u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) dt$, $t \in I$.

Les ensembles

6 Ensembles et éléments

Axiome d'extensionnalité : Si E et F sont deux ensembles, alors $E = F$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $x \in F$ et pour tout $x \in F$, $x \in E$.

Définition. $\{a\}$ est un singleton.

Lorsque $a \neq b$, $\{a, b\}$ est appelé une paire.

Définition. Un prédicat P sur un ensemble E est une application de E dans $\{V, F\}$, où V symbolise le vrai et F le faux.

Définition d'un ensemble en compréhension : Si E est un ensemble et P un prédicat sur E , alors $F = \{x \in E/P(x)\}$ est un ensemble.

De plus, pour tout $x \in E$, $x \in F \iff P(x)$.

Le paradoxe de Russell :

Notons A la collection de tous les ensembles et posons $B = \{x \in A/x \notin x\}$. Alors $B \in B$ si et seulement si $B \notin B$, ce qui est impossible. Cela signifie que A n'est pas un ensemble!

À connaître.

7 Quantificateurs

Définition du quantificateur universel :

Soit E un ensemble et P un prédicat sur E . La propriété " $\forall x \in E, P(x)$ " signifie que pour tous les éléments x de E , $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E/P(x)\}$ est égal à E .

Définition du quantificateur existentiel :

Avec les mêmes notations, la propriété " $\exists x \in E, P(x)$ " signifie qu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E/P(x)\} \neq \emptyset$.

Existence et unicité : La propriété " $\exists! x \in E, P(x)$ " signifie qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E/P(x)\}$ est un singleton.

Remarque. L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu : l'usage d'un " $\forall x$ " est toujours suivi d'un " $\in E, P(x)$ " (ou plus rarement d'un " $, P(x)$ "), où P est un prédicat sur E .

Remarque. Soit P un prédicat sur un ensemble E . Alors dans les phrases

" $\forall x \in E, P(x)$ " et " $\exists x \in E, P(x)$ ", on peut remplacer la variable x par y , ou n'importe quel autre symbole. On dit que, dans les phrases " $\forall x \in E, P(x)$ " et " $\exists x \in E, P(x)$ ", x est une variable muette ou bien que c'est une variable liée.

Dans la propriété " $\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ ", y est une variable liée, et par opposition, on dit que x est une variable libre.

8 Parties d'un ensemble

Définition. Soit E et F deux ensembles.

On dit que F est inclus dans E et l'on note $F \subset E$ si et seulement si tout élément de F est un élément de E , c'est-à-dire si et seulement si $\forall x \in F, x \in E$.

Transitivité de l'inclusion : Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Définition. Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

9 Opérateurs sur les ensembles

Définition. Soit E et F deux ensembles :

- **Intersection :** $x \in E \cap F$ si et seulement si $(x \in E \text{ et } x \in F)$.
- **Réunion :** $x \in E \cup F$ si et seulement si $(x \in E \text{ ou } x \in F)$.
- **Différence ensembliste :** $E \setminus F = \{x \in E / x \notin F\}$.
- **Différence symétrique :** $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.
- **Complémentaire de F dans E :** Si F est une partie de E , le complémentaire de F dans E est $\bar{F} = E \setminus F$, que l'on note plus rarement \mathcal{C}_E^F .

Propriété. Si F et G sont deux parties d'un ensemble E , alors $F \setminus G = F \cap \bar{G}$.

Propriété. Associativité de l'intersection et de la réunion : Soit A, B, C trois ensembles. Alors, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Définition. Soit I un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On définit $\bigcup_{i \in I} E_i$ et $\bigcap_{i \in I} E_i$ par :

$$x \in \bigcup_{i \in I} E_i \iff (\exists i \in I, x \in E_i) \text{ et } x \in \bigcap_{i \in I} E_i \iff (\forall i \in I, x \in E_i).$$

Cette dernière définition n'est pas correcte lorsque $I = \emptyset$.

Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i).$$

Il faut savoir le démontrer.

Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \text{ (avec } I \neq \emptyset \text{)}.$$

Notation. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire telle que, pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est appelée une réunion disjointe et elle est notée $\bigsqcup_{i \in I} E_i$.