DS 1 : Le théorème de Sarkovskii

Les calculatrices sont interdites.

Tout au long de ce problème, f désigne une application définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie 1 : points périodiques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit par récurrence la quantité $f^n(x)$ en convenant que

- si $n = 0$, alors $f^0(x) = x$;
- si $n = 1$ et si $x \in I$, alors $f^1(x) = f(x)$;
- si $n = 2$, $x \in I$ et $f(x) \in I$, alors $f^2(x) = f(f(x))$;
- si $n \geq 2$ et si $f^{n-1}(x)$ est défini avec $f^{n-1}(x) \in I$, alors $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$;
- dans les autres cas, $f^n(x)$ n'est pas définie.

f^n est ainsi une nouvelle fonction.

1°) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f^n(x)$.
Montrer qu'en général, $f^n(x) \neq (f(x))^n$.
Plus précisément, déterminer $\{n \in \mathbb{N} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f^n(x) = (f(x))^n\}$.

2°) On suppose que $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}$ et que I est le domaine de définition de f.
Déterminer les couples (n, x) tels que $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ et $f^n(x)$ est défini.

3°) Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f^{ab+c}(x)$ est défini si et seulement si $f^c((f^a)^b(x))$ est défini et que dans ce cas, $f^{ab+c}(x) = f^c((f^a)^b(x))$.

Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que x est un point de période n pour f si et seulement si

- $f^n(x)$ est défini avec $f^n(x) = x$;
- pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^k(x) \neq x$.

4°) Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que x est un point de période n.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer que $f^N(x) = x$ si et seulement si n divise N, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = kn$.

5°) Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que x est un point de période n.
Montrer que les réels x, $f(x)$, $\ldots$, $f^{n-1}(x)$ sont deux à deux distincts.

Partie 2 : utilisation du TVI

6°) On considère trois ensembles E, F et G.
Soit g une application de E dans F et h une application de F dans G.
Montrer que, pour toute partie A de E, $(h \circ g)(A) = h(g(A))$.

Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on convient que $[a, b]$ désigne l'ensemble des réels compris entre a et b. En particulier, $[a, b] = [b, a]$.

On rappelle le théorème des valeurs intermédiaires, que l'on nommera le TVI :
on suppose que f est continue et que I est un intervalle.
Soit $a, b \in I$. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

7°) Montrer que l'hypothèse de continuité de f est indispensable dans l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Pour toute la suite du problème, on suppose que f est continue et que I est un intervalle.

8°) Soit $a, b \in I$.
Montrer que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ si et seulement si $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.

Lorsque J et K sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec $J \subset I$, on notera "$J \longrightarrow K$" si et seulement si $K \subset f(J)$. On dira dans ce cas que J surpasse K pour f.

9°) Soit $a, b \in I$. On suppose que $[a, b] \longrightarrow [a, b]$.
Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

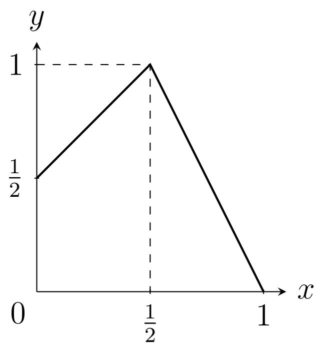
10°) On admettra que, grâce à la continuité de f, pour tout $c, d \in I$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in [c, d] \ / \ f(x) = a\}$ est une partie qui, lorsqu'elle est non vide, admet un maximum et un minimum.
Soit $c, d \in I$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $[c, d] \longrightarrow [a, b]$.
Montrer qu'il existe $c', d' \in [c, d]$ tels que $[a, b] = f([c', d'])$.

11°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$ et $b_0, \ldots, b_{n-1} \in I$.
Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose $I_k = [a_k, b_k]$.
On suppose que $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$.
Montrer qu'il existe $x \in I_0$ tel que $f^n(x) = x$ et tel que,
pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f^k(x) \in I_k$.

Partie 3 : la période 3 implique toutes les périodes

Pour toute la suite du problème, n désigne un entier tel que $n \geq 2$ et x désigne un point de période n pour f.
On ordonne les n réels distincts x, $f(x)$,..., $f^{n-1}(x)$, c'est-à-dire que l'on note
$\{f^k(x) \ / \ 0 \leq k \leq n-1\} = \{x_i \ / \ i \in \{1, \ldots, n\}\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.
On définit le graphe de Markov associé à f et à x ainsi : ses sommets sont les intervalles I_i pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, on place une arête allant du sommet I_i vers le sommet I_j si et seulement si $I_i \longrightarrow I_j$.

12°) Pour cette question seulement, on suppose que $I = [0, 1]$ et que f est l'application dont le graphe est le suivant :



Montrer que 0 est un point de période 3 pour f.
Dessiner le graphe de Markov associé à f et à 0.

13°) On suppose que $n = 3$. Représenter les différentes formes possibles du graphe de Markov associé à f et à x. On montrera qu'il n'y a pas d'autre forme que celles que vous proposerez et pour chaque forme proposée, on montrera qu'elle est possible en donnant un exemple pour f.

14°) On suppose à nouveau que $n = 3$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f admet un point de période k. Il s'agit d'une version simplifiée du théorème de Sarkovskii.

Partie 4 : cas d'une période impaire quelconque

15°) Montrer que $\{k \in \{1, \ldots, n\} \ / \ f(x_k) > x_k\}$ est non vide.
Il possède donc un maximum que l'on note a. Montrer que $a < n$.
Montrer que $I_a \longrightarrow I_a$.

On construit la suite $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ par récurrence en convenant que $V_1 = I_a$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $V_{k+1} = [x_{a_k}, x_{b_k}]$, où a_k et b_k sont respectivement les minimum et maximum de $\{i \in \{1, \ldots, n\} \ / \ x_i \in f(V_k)\}$.

16°) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $V_{k+1} \subset f(V_k)$.
Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, V_k est bien défini et que $I_a \subset V_k$.

17°) Montrer que $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$.

18°) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f^{k-1}(x_a) \in V_k$.
Que vaut V_n ?

19°) Soit $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $c_1, \ldots, c_n \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que
- $I_{c_1} \longrightarrow I_{c_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{c_n}$;
- $c_n = j$;
- pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $I_{c_k} \subset V_k$.

20°) On suppose que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ avec $i \neq a$, $I_a \not\subset f(I_i)$.
Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$, $f(x_i) \geq x_{a+1}$ et que,
pour tout $i \in \{a+1, \ldots, n\}$, $f(x_i) \leq x_a$.
En déduire que n est pair et que f possède un point de période 2.

Jusqu'à la fin de ce problème, on suppose que n est impair et que, pour tout entier k impair et strictement inférieur à n, f ne possède aucun point de période k.

21°) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \ldots, d_k \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{a\}$ tels que
$I_a \longrightarrow I_{d_1} \longrightarrow I_{d_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{d_k} \longrightarrow I_a$.

22°) Lorsque k vérifie les propriétés de la question précédente, montrer que $k \geq n-2$.

23°) Montrer qu'il existe des entiers $e_1, \ldots, e_{n-2}$ tels que l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ vaut exactement $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{a\}$ et tels que $I_a \longrightarrow I_{e_1} \longrightarrow I_{e_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{e_{n-2}} \longrightarrow I_a$. Il s'agit donc d'un cycle dans le graphe de Markov associé à f et à x, qui passe exactement une fois par chacun des sommets du graphe.

24°) Montrer que f possède des points de période h, pour tout $h \geq n$.