DS 1 : un corrigé

Le barème comprend un total de 71 points :

— Partie 1 : 10 points : 2,2,3,2,1.

— Partie 2 : 13 points : 1,1,1,2,4,4.

— Partie 3 : 12 points : 1,4,6.

— Partie 4 : 36 points : 3,3,2,2,5,7,2,4,4,4.

Partie 1 : points périodiques

1°) $\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que
$R(n)$: $f^n(x)$ est défini et $f^n(x) = x + n\,a$.
Pour $n = 0$, $f^0(x)$ est défini et $f^0(x) = x = x + 0 \cdot a$, donc $R(0)$ est vraie.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $R(n)$.
Alors $f^{n+1}(x)$ est défini et $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(x+na) = (x+na)+a = x+(n+1)a$, ce qui prouve $R(n)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f^n(x) = x + na}$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^n(x) = (f(x))^n$.
Alors les deux polynômes $x \longmapsto (x+a)^n$ et $x \longmapsto x+na$ sont égaux, donc en particulier, ils ont le même degré. Ceci prouve que $n = 1$.
Réciproquement si $n = 1$, il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^1(x) = x + a = (f(x))^1$.
En conclusion, $\boxed{\{n \in \mathbb{N} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f^n(x) = (f(x))^n\} = \{1\}}$.
Cet ensemble diffère de $\mathbb{N}$, donc en général, $f^n(x) \neq (f(x))^n$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini si et seulement si $\sqrt{x}$ est défini et $1 - \sqrt{x}$ ne s'annule pas, donc si et seulement si $x \geq 0$ et $x \neq 1$. Ceci prouve que $\boxed{I = [0, +\infty[\setminus\{1\}}$.

Lorsque $n = 0$: par convention $f^0(x) = x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque $n = 1$: $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in I$.

Lorsque $n = 2$: $f^2(x) = f(f(x))$ est défini si et seulement si $x \in I$ et $f(x) \in I$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in I$ avec $f(x) \geq 0$ et $f(x) \neq 1$.
Supposons que $x \in I$. Alors $f(x) \geq 0 \iff 1 - \sqrt{x} > 0 \iff x < 1$ et $f(x) = 1 \iff x = 0$. Ainsi $f^2(x)$ est défini si et seulement si $x \in]0, 1[$.

Lorsque $n \geq 3$: Supposons que $f^2(x)$ est défini, c'est-à-dire que $0 < x < 1$. Alors $1 - \sqrt{x} < 1$, donc $f(x) > 1$ puis $f^2(x) < 0$, donc $f^3(x)$ n'est pas défini. Les itérés d'ordre $n \geq 3$ ne sont jamais définis.

En conclusion, $f^n(x)$ est défini si et seulement si
$\boxed{(n,x) \in \{(0,x)\ /\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,x)\ /\ x \in [0,+\infty[\setminus\{1\}\} \cup \{(2,x)\ /\ x \in]0,1[\}}$.

3°) a) D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(x)$ est défini si et seulement si $f^{n-1}(x)$ est défini et $f^{n-1}(x) \in I$.
On en déduit que si $f^n(x)$ est défini pour un entier naturel n, alors pour tout $p \in \{0,\dots,n\}$, $f^p(x)$ est défini (on le démontre par récurrence descendante sur p).

b) Soit $b \in \mathbb{N}$. Notons $R(a)$ la propriété suivante : $f^a(f^b(x))$ est défini si et seulement si $f^{a+b}(x)$ est défini et dans ce cas, $f^a(f^b(x)) = f^{a+b}(x)$.
$R(0)$ est clairement vraie.
Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $R(a)$ est vraie.
D'après a), $f^{a+1}(f^b(x))$ est défini si et seulement si $f^a(f^b(x))$ est défini et appartient à I, donc d'après $R(a)$ si et seulement si $f^{a+b}(x)$ est défini et appartient à I, c'est-à-dire si et seulement si $f^{a+b+1}(x)$ est défini. De plus, dans ce cas,
$f^{a+1}(f^b(x)) = f[f^a(f^b(x))] = f(f^{a+b}(x))$ d'après $R(a)$, donc $f^{a+1}(f^b(x)) = f^{a+b+1}(x)$, ce qui prouve $R(a+1)$.
On a ainsi montré que, pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $f^a(f^b(x))$ est défini si et seulement si $f^{a+b}(x)$ est défini et que dans ce cas, $f^a(f^b(x)) = f^{a+b}(x)$.

c) Soit $a \in \mathbb{N}$. Lorsque $b \in \mathbb{N}$, notons $S(b)$ la propriété suivante : $(f^a)^b(x)$ est défini si et seulement si $f^{ab}(x)$ est défini et dans ce cas, $(f^a)^b(x) = f^{ab}(x)$.
$S(0)$ est clairement vraie car $f^0(x)$ est toujours défini et vaut x.
Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $S(b)$ est vraie. Supposons que $(f^a)^{b+1}(x)$ est défini. Alors $(f^a)^b(x)$ est défini et $f^a((f^a)^b(x))$ est défini (car c'est par définition égal à $(f^a)^{b+1}(x)$), donc d'après $S(b)$, $f^{ab}(x)$ est défini et est égal à $(f^a)^b(x)$, donc $f^a(f^{ab}(x))$ est aussi défini. D'après b), $f^{a+ab}(x)$ est défini et
$f^{a(b+1)}(x) = f^{a+ab}(x) = f^a(f^{ab}(x)) = f^a((f^a)^b(x)) = (f^a)^{b+1}(x)$.
Réciproquement, si $f^{a(b+1)}(x)$ est défini, d'après b), $f^a(f^{ab}(x))$ est défini, donc d'après a), $f^{ab}(x)$ est défini. D'après $S(b)$, $(f^a)^b(x)$ est défini et est égal à $f^{ab}(x)$, donc $f^a((f^a)^b(x))$ est défini, ce qui prouve que $(f^a)^{b+1}(x)$ est défini. Ceci prouve $S(b)$.

d) Soit maintenant $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Supposons que $f^{ab+c}(x)$ est défini. Alors d'après b), $f^c(f^{ab}(x))$ est défini et $f^{ab+c}(x) = f^c(f^{ab}(x))$. D'après a), $f^{ab}(x)$ est aussi défini, donc d'après c), $(f^a)^b(x)$ est défini et $(f^a)^b(x) = f^{ab}(x)$. Ainsi, $f^c((f^a)^b(x))$ est bien défini et il est égal à $f^{ab+c}(x)$.
Réciproquement, supposons que $f^c((f^a)^b(x))$ est défini. D'après a), $(f^a)^b(x)$ est défini, donc d'après c), $f^{ab}(x)$ est défini et $f^{ab}(x) = (f^a)^b(x)$. Ainsi, $f^c(f^{ab}(x))$ est défini et b) montre que $f^{ab+c}(x)$ est défini, ce qui conclut.

4°) Soit $N \in \mathbb{N}$.
$\diamond$ Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $f^{kn}(x)$ est défini et $f^{kn}(x) = x$. C'est en effet évident pour $k = 0$ et si $f^{kn}(x)$ est défini avec $f^{kn}(x) = x$, alors comme $f^n(x)$ est défini par hypothèse, $f^n(f^{kn}(x))$ est défini, donc d'après la question 3, $f^{(k+1)n}(x)$ est défini et $f^{(k+1)n}(x) = f^n(f^{kn}(x)) = f^n(x) = x$.
Ceci montre que lorsque n divise N, $f^N(x)$ est défini et $f^N(x) = x$.

$\diamond$ Supposons maintenant que n ne divise pas N.
Écrivons la division euclidienne de N par n : $N = q\,n + r$, avec $0 < r < n$.
D'après le point précédent, $f^{qn}(x)$ est défini et $f^{qn}(x) = x$, or $r < n$, donc $f^r(x)$ est défini. Ainsi, $f^r(f^{qn}(x))$ est défini, ce qui d'après la question 3 prouve que $f^{qn+r}(x)$ est défini et que $f^{qn+r}(x) = f^r(x) \neq x$, car $1 \leq r \leq n-1$. Ceci prouve que $f^N(x)$ est défini mais que $f^N(x) \neq x$.
$\diamond$ Remarquons que lorsque x est un point périodique pour f, on a notamment démontré que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $f^N(x)$ est défini.

5°) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}$
tels que $0 \leq i < j \leq n-1$ et $f^i(x) = f^j(x)$.
Appliquons f^{n-j} aux deux membres de cette égalité :
$f^{n-j}(f^i(x)) = f^{n-j}(f^j(x))$, donc $f^{n-j+i}(x) = f^n(x) = x$. Mais ceci est faux, car $0 < j - i < n$, donc $0 < n - j + i < n$. On conclut que $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ sont deux à deux distincts.

Partie 2 : utilisation du TVI

6°) Soit A une partie de E.
Soit $z \in (h \circ g)(A)$. Il existe $x \in A$ tel que $z = (h \circ g)(x)$. Alors $z = h(y)$ où $y = g(x)$.
$x \in A$ donc $y = g(x) \in g(A)$. Ainsi, $z = h(y) \in h(g(A))$.
On a montré que $(h \circ g)(A) \subset h(g(A))$.
Réciproquement, soit $z \in h(g(A))$. Il existe $y \in g(A)$ tel que $z = h(y)$.
$y \in g(A)$, donc il existe $x \in A$ tel que $y = g(x)$.
Alors $z = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$ et $x \in A$, donc $z \in (h \circ g)(A)$. Ceci démontre l'inclusion réciproque, donc $(h \circ g)(A) = h(g(A))$.

7°) Prenons $I = \mathbb{R}$ et f l'application caractéristique de $\mathbb{Q}$, définie par : $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Prenons $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ainsi, $[f(a), f(b)] = [0, 1]$, donc $\frac{1}{2} \in [f(a), f(b)]$. Cependant, pour tout $y \in [a, b]$, $f(y) \neq \frac{1}{2}$, donc f ne vérifie pas la conclusion du TVI, ce qui montre que l'hypothèse de continuité est indispensable.

8°) L'implication dans le sens direct est évidente.
Réciproquement, supposons que $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.
Soit $y \in [f(a), f(b)]$. D'après le TVI, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$,
donc $y \in f([a, b])$, ce qui prouve que $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$. Ainsi, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

9°) D'après l'énoncé, $[a, b] \subset f([a, b])$. En particulier, $a \in f([a, b])$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $a = f(c)$. De même, il existe $d \in [a, b]$ tel que $b = f(d)$.
Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $a \leq b$.
Alors $c - f(c) = c - a \geq 0$ car $a \leq c \leq b$ et de même, $d - f(d) = d - b \leq 0$.
Pour tout $t \in I$, posons $g(t) = t - f(t)$: g est continue sur I d'après les théorèmes usuels et $0 \in [g(d), g(c)]$, donc d'après le TVI appliqué à g, il existe $x \in [c, d] \subset [a, b]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = x$.

10°) $\diamond$ Soit $c, d \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. f étant continue, vous verrez plus tard que $\{x \in [c, d] \ / \ f(x) = a\}$ est fermé et borné. Étant borné, si cet ensemble est non vide, d'après la propriété de la borne supérieure caractéristique de $\mathbb{R}$, il possède un sup et un inf, puis étant fermé, ce sup et cet inf sont respectivement le maximum et le minimum.
$\diamond$ Par hypothèse, $[a, b] \subset f([c, d])$,
donc il existe $\alpha, \beta \in [c, d]$ tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$.
Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $\alpha \leq \beta$.
D'après l'énoncé, on peut alors poser $d' = \min(\{x \in [\alpha, \beta] \ / \ f(x) = b\})$: la partie utilisée est non vide car $f(\beta) = b$ et $\beta \in [\alpha, \beta]$.
On peut ensuite poser $c' = \max(\{x \in [\alpha, d'] \ / \ f(x) = a\})$: la partie utilisée est non vide car $f(\alpha) = a$ et $\alpha \in [\alpha, d']$.
Supposons que $f([c', d']) \not\subset [a, b]$: Alors il existe $x \in [c', d']$ tel que $f(x) \notin [a, b]$.

— Supposons d'abord que $a \leq b$ et que $f(x) < a$.
$f(x) < a$ et $f(d') = b \geq a$, donc d'après le TVI, il existe $c'' \in]x, d']$ tel que $f(c'') = a$. Alors $c'' \in]c', d']$ et $f(c'') = a$: c'est impossible d'après le caractère maximal de c'.
— De même, si $a \leq b$ et $f(x) > b$, il existe $d'' \in [c', x[$ tel que $f(d'') = b$, ce qui contredit le caractère minimal de d'.
— Supposons maintenant que $a > b$ et que $f(x) < b$. Alors d'après le TVI, il existe $d'' \in [c', x[$ tel que $f(d'') = b$. Alors $d'' \in [c', d'[$ et $f(d'') = b$ ce qui contredit le caractère minimal de d'.
— De même, si $a > b$ et $f(x) > a$, il existe $c'' \in]x, d']$ tel que $f(c'') = a$, ce qui contredit le caractère maximal de c'.

On aboutit à une contradiction dans tous les cas, donc $f([c', d']) \subset [a, b] = [f(c'), f(d')]$, puis d'après la question précédente, $f([c', d']) = [f(c'), f(d')] = [a, b]$, ce qu'il fallait démontrer.

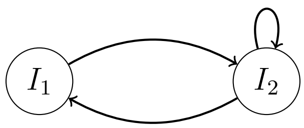
11°) Posons $a_n = a_0$ et $b_n = b_0$, de sorte que $I_{n-1} \longrightarrow I_n$.
D'après la question précédente, il existe $a'_{n-1}, b'_{n-1} \in I_{n-1}$ tels que $[a_n, b_n] = f([a'_{n-1}, b'_{n-1}])$.
Alors, si $n \geq 2$, $f(I_{n-2}) \supset I_{n-1} \supset [a'_{n-1}, b'_{n-1}]$, donc toujours d'après la question précédente, il existe $a'_{n-2}, b'_{n-2} \in I_{n-2}$ tels que $f([a'_{n-2}, b'_{n-2}]) = [a'_{n-1}, b'_{n-1}]$.
Par récurrence descendante, on construit ainsi deux suites $(a'_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(b'_k)_{0 \leq k \leq n}$ telles que

— $a'_n = a_n$ et $b'_n = b_n$;
— pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $a'_k \in I_k$ et $b'_k \in I_k$;
— pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $f([a'_{k-1}, b'_{k-1}]) = [a'_k, b'_k]$.

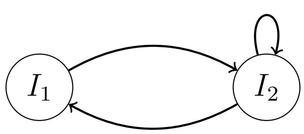
Si l'on restreint le domaine de départ à $[a'_0, b'_0]$, l'application f^n est ainsi définie et continue d'après les théorèmes usuels (au prix d'une récurrence immédiate).
Alors, d'après la question 6, $f^n([a'_0, b'_0]) = f^{n-1}(f([a'_0, b'_0])) = f^{n-1}([a'_1, b'_1])$, puis par récurrence, on montre que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $f^n([a'_0, b'_0]) = f^{n-k}([a'_k, b'_k])$.
En particulier, avec $k = n$, on obtient que $f^n([a'_0, b'_0]) = [a'_n, b'_n] = [a_n, b_n] = [a_0, b_0]$, donc $f^n([a'_0, b'_0]) \supset [a'_0, b'_0]$. On peut alors appliquer la question 9, en remplaçant f par f^n. Ainsi, il existe $x \in [a'_0, b'_0]$ tel que $f^n(x) = x$. De plus, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f^k(x) \in f^k([a'_0, b'_0]) = [a'_k, b'_k] \subset I_k$, ce qu'il fallait démontrer.

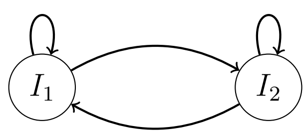
Partie 3 : la période 3 implique toutes les périodes

12°) D'après le graphe, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$ et $f(1) = 0$, donc 0 est bien un point de période 3 pour f.
Selon les notations de l'énoncé, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_3 = 1$, donc $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$.
D'après le graphe de f, $f(I_1) = I_2$ et $f(I_2) = [0, 1] = I_1 \cup I_2$, donc I_1 surpasse uniquement I_2 et I_2 surpasse I_1 et I_2. On obtient ainsi le graphe de Markov suivant :

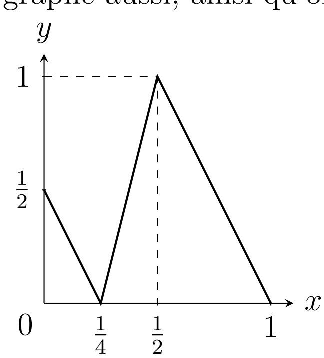


13°) Le graphe de Markov ne dépend que des intervalles I_i, lesquels ne dépendent que de $\{f^k(x) \ / \ k \in \{0, \dots, n-1\}\}$. On peut donc remplacer x par $f(x)$ ou par $f(f(x))$ sans changer le graphe de Markov, ce qui permet de supposer que $x = \min\{x, f(x), f(f(x))\}$, donc que $x_1 = x$. Il n'y a alors que deux cas possibles : $x_2 = f(x)$ et $x_3 = f(f(x))$, ou bien $x_2 = f(f(x))$ et $x_3 = f(x)$.
$\diamond$ Supposons d'abord que $x_2 = f(x)$, c'est-à-dire que $x < f(x) < f(f(x))$, ou encore que $x_1 = x$, $x_2 = f(x)$ et $x_3 = f(f(x))$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires,
pour tout $a, b \in I$, $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$,
donc $f(I_1) = f([x_1, x_2]) \supset [f(x_1), f(x_2)] = I_2$
et $f(I_2) \supset [f(x_2), f(x_3)] = [x_1, x_3] = I_1 \cup I_2$. Ainsi, le graphe de Markov est égal l'un des deux graphes suivants :



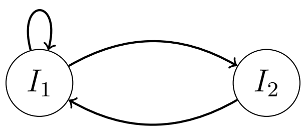


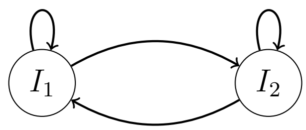
D'après la question précédente, le premier graphe est effectivement possible. Le second graphe aussi, ainsi qu'on peut s'en assurer avec la fonction dont le graphe est



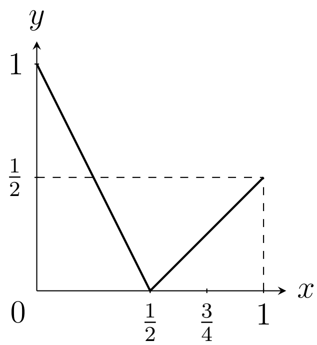
0 est encore de période 3 et, avec les notations de la question précédente,
$f(I_1) = f(I_2) = I_1 \cup I_2$.
$\diamond$ Il reste à étudier le cas où $x_2 = f(f(x))$, c'est-à-dire où $x < f(f(x)) < f(x)$, c'est-à-dire où $x_1 = x$, $x_2 = f(f(x))$ et $x_3 = f(x)$.
Alors $f(I_1) = f([x_1, x_2]) \supset [f(x_1), f(x_2)] = [x_3, x_1] = I_1 \cup I_2$

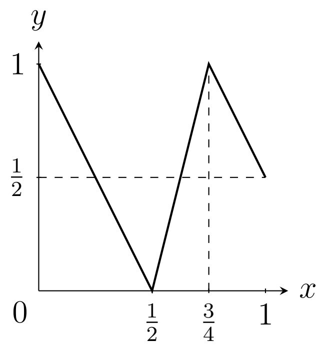
et $f(I_2) \supset [f(x_2), f(x_3)] = [x_1, x_2] = I_1$. Ainsi, le graphe de Markov est égal l'un des deux graphes suivants :





Ces graphes sont effectivement possibles, ainsi qu'on peut s'en assurer avec les fonctions suivantes





où 0 est encore de période 3 avec $0 < f(f(0)) = \frac{1}{2} < f(0) = 1$.

14°) Comme on l'a vu lors de la question précédente, on peut supposer que $x = \min\{x, f(x), f(f(x))\}$.

$\bullet$ Supposons d'abord qu'on est dans le premier cas de la question précédente.

$\diamond$ Alors $I_2 \longrightarrow I_2$, donc d'après la question 9, il existe un point de période 1.

$\diamond$ On a également le cycle $I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$, donc d'après la question 11, il existe $y \in I_2$ tel que $f^2(y) = y$ et $f(y) \in I_1$.

Supposons que $f(y) = y$. Alors $y \in I_1 \cap I_2 = \{f(x)\}$, donc $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x)$. Ainsi, $f(x) = f^2(x)$ ce qui est faux d'après la question 5. On en déduit que $f(y) \neq y$, ce qui prouve que y est un point de période 2 pour f.

$\diamond$ Il reste à montrer l'existence d'un point de période k lorsque $k \geq 4$. Or on dispose du cycle suivant : $I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \underbrace{I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_2}_{I_2 \text{ apparaît } k-1 \text{ fois}}$.

D'après la question 11, il existe $y \in I_2$ tel que $f^k(y) = y$, avec $f(y) \in I_1$ et, pour tout $i \in \{2, \ldots, k-1\}$, $f^i(y) \in I_2$. On a également $f^k(y) = y \in I_2$.

Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ tel que $f^i(y) = y$. Alors $f(y) = f^{i+1}(y)$, or $f(y) \in I_1$ et $f^{i+1}(y) \in I_2$. Ainsi, $f(y) \in I_1 \cap I_2$, donc $f(y) = f(x)$.

Alors $f^3(y) = f^2(f(y)) = f^2(f(x)) = f^3(x) = x$, or $f^3(y) \in I_2$ car $k \geq 4$, donc $x \in I_2$, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $f^i(y) \neq y$, donc y est un point de période k pour f, ce qui conclut.

$\bullet$ Supposons maintenant que l'on est dans le second cas de la question précédente, avec $x < f(f(x)) < f(x)$. La démonstration est très proche du cas précédent :

$\diamond$ On a $I_1 \longrightarrow I_1$, donc il existe un point de période 1.

$\diamond$ On a également le cycle $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, donc il existe $y \in I_1$ tel que $f^2(y) = y$ et $f(y) \in I_2$. Supposons que $f(y) = y$. Alors $y \in I_1 \cap I_2 = \{f(f(x))\}$, donc $y = f^2(x)$ et

$f(y) = f^3(x) = x$. Ainsi, $x = f^2(x)$ ce qui est faux d'après la question 5. On en déduit que $f(y) \neq y$, ce qui prouve que y est un point de période 2 pour f.
$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 4$. On dispose du cycle suivant : $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \underbrace{I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1}_{I_1 \text{ apparaît } k-1 \text{ fois}}$.
D'après la question 11, il existe $y \in I_1$ tel que $f^k(y) = y$, avec $f(y) \in I_2$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, k-1\}$, $f^i(y) \in I_1$. On a également $f^k(y) = y \in I_1$.
Supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, k-1\}$ tel que $f^i(y) = y$. Alors $f(y) = f^{i+1}(y)$, or $f(y) \in I_2$ et $f^{i+1}(y) \in I_1$. Ainsi, $f(y) \in I_1 \cap I_2$, donc $f(y) = f^2(x)$.
Alors $f^3(y) = f^2(f(y)) = f^2(f^2(x)) = f^4(x) = f(x)$, or $f^3(y) \in I_1$, donc $f(x) \in I_1$, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $f^i(y) \neq y$, donc y est un point de période k pour f, ce qui conclut.

Partie 4 : cas d'une période impaire

15°) $\diamond$ Par construction de la suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f(x_1) = x_i$. $n \geq 2$, donc $x_i \neq x_1$. Alors $f(x_1) = x_i > x_1$, donc $1 \in \{k \in \mathbb{N}_n \ / \ f(x_k) > x_k\}$, ce qui prouve que cet ensemble est non vide.
$\diamond$ De même, il existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $f(x_n) = x_i$, donc $f(x_n) < x_n$ et $n \notin \{k \in \mathbb{N}_n \ / \ f(x_k) > x_k\}$. Ainsi, $a < n$.
$\diamond$ Il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $f(x_a) = x_i$ et $f(x_a) > x_a$, donc $f(x_a) \geq x_{a+1}$. De plus $a+1 \notin \{k \in \mathbb{N}_n \ / \ f(x_k) > x_k\}$, donc $f(x_{a+1}) \leq x_{a+1}$, or $f(x_{a+1}) \neq x_{a+1}$ (toujours car $n \geq 2$), donc $f(x_{a+1}) \leq x_a$. Ceci prouve que $[f(x_{a+1}), f(x_a)] \supset [x_a, x_{a+1}]$, or d'après le TVI, $[f(x_{a+1}), f(x_a)] \subset f([x_{a+1}, x_a])$, donc $f(I_a) \supset I_a$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) $\diamond$ Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Par construction, $V_{k+1} = [x_i, x_j]$, où x_i et x_j sont dans $f(V_k)$, or d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(V_k)$ est un intervalle, donc $V_{k+1} \subset f(V_k)$.
$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}_n$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante : V_k est bien défini et $I_a \subset V_k$.
$V_1 = I_a$, donc $R(1)$ est vraie.
Supposons $R(k)$ avec $1 \leq k < n$. Notons $A_k = \{i \in \{1, \dots, n\} \ / \ x_i \in f(V_k)\}$.
$I_a \subset V_k$ donc $I_a \subset f(I_a) \subset f(V_k)$. Ainsi, a et $a+1$ sont dans A_k. En particulier, A_k est non vide, donc cette partie possède bien un minimum et un maximum. Ainsi, a_k et b_k sont définis et $a_k \leq a$, $b_k \geq a+1$.
Ceci prouve que V_{k+1} est bien défini et que $I_a \subset V_{k+1}$.

17°) Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. Démontrons par récurrence que $V_k \subset V_{k+1}$.
Pour $k = 1$, d'après la question précédente, $V_1 = I_a \subset V_2$.
Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n-2$. On suppose que $V_k \subset V_{k+1}$.
Alors $f(V_k) \subset f(V_{k+1})$, donc avec les notations de la question précédente, $A_k \subset A_{k+1}$.
Ceci implique que $a_k = \min(A_k) \geq \min(A_{k+1}) = a_{k+1}$ et de même que $b_k \leq b_{k+1}$, donc $V_{k+1} = [x_{a_k}, x_{b_k}] \subset [x_{a_{k+1}}, x_{b_{k+1}}] = V_{k+2}$, ce qui conclut la récurrence.

18°) $\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}_n$. Montrons par récurrence que $f^{k-1}(x_a) \in V_k$.
Pour $k = 1$, $f^{k-1}(x_a) = x_a \in I_a = V_1$, donc la propriété est vérifiée.

Soit k un entier tel que $1 \leq k < n$. On suppose que $f^{k-1}(x_a) \in V_k$.
Alors $f^k(x_a) = f(f^{k-1}(x_a)) \in f(V_k)$, or il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $f^k(x_a) = x_i$, donc $i \in A_k$. Ainsi, $a_k \leq i \leq b_k$ puis $f^k(x_a) = x_i \in [x_{a_k}, x_{b_k}] = V_{k+1}$, ce qui conclut la récurrence.
$\diamond$ D'après la question 17, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $f^{k-1}(x_a) \in V_n$.
Or il existe $b \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x_a = f^b(x)$, donc $\{f^{k+b-1}(x) \ / \ k \in \mathbb{N}_n\} \subset V_n$.
x étant de période n, cet ensemble contient $f^b(x), f^{b+1}(x), \ldots, f^{n-1}(x), x, f(x), \ldots, f^{b-1}(x)$.
Ceci montre que $x_1, \ldots, x_n \in V_n$, donc $[x_1, x_n] \subset V_n$, or il est clair que par construction, $V_n \subset [x_1, x_n]$. En conclusion, $\boxed{V_n = [x_1, x_n]}$.

19°) On construit la suite $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$ par récurrence descendante :
$V_n = [x_1, x_n]$, donc $I_j \subset V_n$. Ainsi, on peut poser $c_n = j$, ce qui garantit la seconde propriété de l'énoncé.
Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Supposons construits $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ tels que $I_{c_{k+1}} \longrightarrow I_{c_{k+2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{c_n}$ et pour tout $h \in \{k+1, \ldots, n\}$, $I_{c_h} \subset V_h$.
Il suffit de montrer qu'il existe $c_k \in \mathbb{N}_n$ tel que $I_{c_k} \subset V_k$ et $I_{c_k} \longrightarrow I_{c_{k+1}}$.
Raisonnons par l'absurde en faisant l'hypothèse H_1 suivante :
pour tout $c \in \mathbb{N}_n$ tel que $I_c \subset V_k$, $I_{c_{k+1}} \not\subset f(I_c)$.
Par construction de V_k, il existe $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i < j$ tels que $V_k = [x_i, x_j]$.
Supposons que $f(x_i) \leq x_{c_{k+1}}$, et appelons H_2 cette hypothèse.
Si $f(x_{i+1}) \geq x_{c_{k+1}+1}$, alors $I_i \longrightarrow I_{c_{k+1}}$, ce qui est faux d'après H_1.
Donc $f(x_{i+1}) < x_{c_{k+1}+1}$, or $f(x_{i+1}) \in \{x_h \ / \ h \in \mathbb{N}_n\}$, donc $f(x_{i+1}) \leq x_{c_{k+1}}$. Par récurrence, on montre que, pour tout $h \in \{i, \ldots, j\}$, $f(x_h) \leq x_{c_{k+1}}$.
Par ailleurs d'après la question 16, $V_{k+1} \subset f(V_k)$, donc il existe $\alpha \in V_k$ tel que $x_{c_{k+1}+1} = f(\alpha)$. Clairement, $\alpha \notin \{x_i, \ldots, x_j\}$, donc il existe $h \in \{i, \ldots, j-1\}$ tel que $\alpha \in]x_h, x_{h+1}[$. Mais $f(\alpha) = x_{c_{k+1}+1}$ et $f(x_h) \leq x_{c_{k+1}}$, donc $I_h \longrightarrow I_{c_{k+1}}$, ce qui est faux d'après H_1.
Ainsi, H_2 est fausse, donc $f(x_i) > x_{c_{k+1}}$, donc $f(x_i) \geq x_{c_{k+1}+1}$. Alors de même que précédemment, on montre par récurrence que $f(x_h) \geq x_{c_{k+1}+1}$ pour tout $h \in \{i, \ldots, j\}$.
Mais il existe $\alpha \in V_k$ tel que $f(\alpha) = x_{c_{k+1}}$. Nécessairement, il existe $h \in \{i, \ldots, j-1\}$ tel que $\alpha \in]x_h, x_{h+1}[$. Mais $f(\alpha) = x_{c_{k+1}}$ et $f(x_h) \geq x_{c_{k+1}+1}$, donc $I_h \longrightarrow I_{c_{k+1}}$, ce qui est faux d'après H_1.
On aboutit toujours à une contradiction, donc H_1 est fausse, ce qui conclut.

20°) $\diamond$ Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $i \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $f(x_i) < x_{a+1}$. Alors $f(x_i) \leq x_a$. De plus, on a vu en question 15 que $f(x_a) \geq x_{a+1}$, donc $i \neq a$. On peut donc poser $m = \max(\{i \in \{1, \ldots, a-1\} \ / \ f(x_i) \leq x_a\})$. Alors $f(x_m) \leq x_a$ et $f(x_{m+1}) \geq x_{a+1}$, donc $I_a \subset f(I_m)$ et $m \neq a$, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$, $f(x_i) \geq x_{a+1}$.
$\diamond$ De même, si l'on suppose qu'il existe $i \in \{a+1, \ldots, n\}$, $f(x_i) > x_a$, alors $i \neq a+1$ et, en posant $m = \min(\{i \in \{a+2, \ldots, n\} \ / \ f(x_i) \geq x_{a+1}\})$, on montre que $I_a \subset f(I_{m-1})$ ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \{a+1, \ldots, n\}$, $f(x_i) \leq x_a$.
$\diamond$ D'après la question 5, $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_a)$ sont a éléments distincts de l'ensemble $\{x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_n\}$, donc ce dernier ensemble est de cardinal supérieur à a. Ainsi,

$a \leq n-a$. De même, $f(x_{a+1}), \ldots, f(x_n)$ sont $n-a$ éléments distincts de $\{x_1, \ldots, x_a\}$, donc $n-a \leq a$.
Ainsi, $n-a=a$, puis $n=2a$, ce qui prouve que n est pair.
$\diamond$ On en déduit également que $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_a)\} = \{x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_n\}$, donc il existe $i, j \in \mathbb{N}_a$ tels que $f(x_i) = x_{a+1}$ et $f(x_j) = x_n$. Alors, toujours d'après le TVI, $[x_{a+1}, x_n] = [f(x_i), f(x_j)] \subset f([x_i, x_j]) \subset f([x_1, x_a])$, donc $[x_1, x_a] \longrightarrow [x_{a+1}, x_n]$.
De même, l'égalité $\{f(x_{a+1}), \ldots, f(x_n)\} = \{x_1, \ldots, x_a\}$ permet de montrer que $[x_{a+1}, x_n] \longrightarrow [x_1, x_a]$. Ainsi, $[x_1, x_a] \longrightarrow [x_{a+1}, x_n] \longrightarrow [x_1, x_a]$. On peut alors appliquer la question 11 : il existe $y \in [x_1, x_a]$ tel que $f^2(y) = y$ et $f(y) \in [x_{a+1}, x_n]$. Ainsi $f(y) > y$ et y est un point de période 2 pour f.

21°) n est impair, donc d'après la question précédente, il existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $i \neq a$ et $I_i \longrightarrow I_a$. Alors, d'après la question 19, il existe $c_1, \ldots, c_n \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que $I_{c_1} \longrightarrow I_{c_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{c_n}$, avec $c_n = i$ et $I_{c_1} \subset V_1 = I_a$, donc $c_1 = a$. Ainsi, $I_a \longrightarrow I_{c_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{c_{n-1}} \longrightarrow I_i \longrightarrow I_a$, et $i \neq a$.
$c_1 = a$, donc on peut poser $m = \max(\{j \in \{1, \ldots, n-1\} \ / \ c_j = a\})$. Alors on a $I_a \longrightarrow I_{c_{m+1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{c_{n-1}} \longrightarrow I_{c_n} \longrightarrow I_a$, et pour tout $j \in \{m+1, \ldots, n\}$, $c_j \neq a$, ce qu'il fallait démontrer.

22°) Supposons que k vérifie les propriétés de la question précédente.
Supposons que $k < n-2$. D'après la question 11 appliquée au cycle de la question précédente, il existe $y \in I_a$ tel que $f^{k+1}(y) = y$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f^i(y) \in I_{d_i}$.
Soit $i \in \mathbb{N}_k$. Supposons que $f^i(y) = y$. Alors $y \in I_a \cap I_{d_i}$, or $a \neq d_i$, donc il existe $h \in \mathbb{N}_n$ tel que $y = x_h$. Mais x_h est de période n, donc y est de période n avec $f^{k+1}(y) = y$. D'après la question 4, n divise $k+1$, donc $k+1 \geq n$ ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $f^i(y) \neq y$, donc y est de période $k+1$. Or $k+1 < n$ donc d'après l'hypothèse de l'énoncé, $k+1$ est pair.
Appliquons alors la question 11 avec le cycle
$I_a \longrightarrow I_{d_1} \longrightarrow I_{d_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{d_k} \longrightarrow I_a \longrightarrow I_a$: il existe $z \in I_a$ tel que $f^{k+2}(z) = z$, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $f^i(z) \in I_{d_i}$ et $f^{k+1}(z) \in I_a$.
À nouveau, on montre que, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $f^i(z) \neq z$.
Supposons que $f^{k+1}(z) = z$. Alors $f(z) = f^{k+2}(z) = z \in I_a \cap I_{d_1}$, donc à nouveau $z = f(z)$ est de période n, ce qui est faux. Ainsi, z est de période $k+2$, ce qui est impossible car $k+2$ est impair et $k+2 < n$.
Ceci démontre que $k \geq n-2$.

23°) Notons h le minimum des entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $d_1, \ldots, d_k \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{a\}$ tels que $I_a \longrightarrow I_{d_1} \longrightarrow I_{d_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{d_k} \longrightarrow I_a$.
D'après la question 21, h est correctement défini (c'est le minimum d'un ensemble non vide d'entiers) et il existe $e_1, \ldots, e_h \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{a\}$ tels que
$I_a \longrightarrow I_{e_1} \longrightarrow I_{e_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{e_h} \longrightarrow I_a$.
D'après la question 22, $h \geq n-2$.
Supposons que $I_{e_1}, \ldots, I_{e_h}$ ne sont pas deux à deux distincts. Dans ce cas, il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq i < j \leq h$ et $I_{e_i} = I_{e_j}$. Alors, dans le cycle
$I_a \longrightarrow I_{e_1} \longrightarrow I_{e_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{e_h} \longrightarrow I_a$, on peut supprimer la partie

$I_{e_{i+1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{e_j}$ pour obtenir le cycle
$I_a \longrightarrow I_{e_1} \longrightarrow \cdots I_{e_i} \longrightarrow I_{e_{j+1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{e_h} \longrightarrow I_a$, mais ceci contredit le caractère minimal de h. Ainsi, les intervalles $I_{e_1}, \ldots, I_{e_h}$ sont deux à deux distincts.
Or ils appartiennent tous à $\{I_1, \ldots, I_{n-1}\} \setminus \{I_a\}$ qui est de cardinal $n-2$, donc $h \leq n-2$.
On a donc montré que $h = n-2$ et que l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ vaut exactement $\{1, \ldots, n-1\} \setminus \{a\}$, ce qui conclut.

24°) Soit h un entier tel que $h > n$. Considérons le cycle
$I_a \longrightarrow I_{e_1} \longrightarrow I_{e_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{e_{n-2}} \longrightarrow \underbrace{I_a \longrightarrow I_a \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_a}_{I_a \text{ apparaît } h-n+2 \text{ fois}}$.
D'après la question 11, il existe $y \in I_a$ tel que $f^h(y) = y$, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-2}$, $f^i(y) \in I_{e_i}$, puis pour tout $i \in \{n-1, \ldots, h-1\}$, $f^i(y) \in I_a$.
Comme en question 22, on montre que pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-2}$, $f^i(y) \neq y$.
Soit $i \in \{n-1, \ldots, h-1\}$. Supposons que $f^i(y) = y$. Alors $f(y) = f^{i+1}(y) \in I_a \cap I_{e_1}$, donc il existe $j \in \mathbb{N}_n$ tel que $f(y) = x_j$. Alors $y = f^{h-1}(f(y)) = f^{h-1}(x_j)$, donc il existe $\ell \in \mathbb{N}_n$ tel que $y = x_\ell$.
Mais $f^{n-1}(y) \in I_a$, donc $f^{n-1}(y)$ est égal à x_a ou à x_{a+1}. Notons-le x_b.
De plus, pour tout $r \in \{1, 2\}$, $n-1+r \leq n+1 \leq h$, donc $f^r(b) = f^{n-1+r}(y) \in I_a$. Ainsi, $f(x_b)$ et $f^2(x_b)$ sont encore dans $I_a = [x_a, x_{a+1}]$, ce qui est impossible.
On a donc prouvé que, pour tout $i \in \{n-1, \ldots, h-1\}$, $f^i(y) \neq y$, donc y est bien un point de période h de f.

Bibliographie : On a fait le plus gros du travail pour démontrer le théorème de Sarkovskii. On trouvera son énoncé et la fin de sa démonstration ici :
https ://xavier.caruso.ovh/popularization/mathpark/sarkovskii.pdf.
On pourra aussi consulter l'ouvrage de L. S. Block et W. A. Coppel intitulé "Dynamics in One Dimension", Springer-Verlag, pages 5 à 12.