

DM 3 : un corrigé

Partie I : fonctions convexes

1°) La fonction $\exp$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d^2}{dx^2}(e^x) = e^x \geq 0$, donc $\exp'$ est croissante et $\exp$ est bien une application convexe sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $x, y \in I$ et $\alpha \in [0, 1]$. f et g étant convexes,
 $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ et $g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$,
or a et b sont positifs, donc $af(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha af(x) + (1 - \alpha)af(y)$
et $bg(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha bg(x) + (1 - \alpha)bg(y)$, puis en sommant ces inégalités,
 $(af + bg)(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha(af + bg)(x) + (1 - \alpha)(af + bg)(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) Pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x, t)\varphi(t)$ est continue sur $[a, b]$, donc la quantité $J(x) = \int_a^b f(x, t)\varphi(t) dt$ est bien définie. Il reste à montrer que l'application J est convexe sur I .

Soit $x, y \in I$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Pour tout $t \in [a, b]$, par convexité de l'application $z \mapsto f(z, t)$,
 $f(\alpha x + (1 - \alpha)y, t) \leq \alpha f(x, t) + (1 - \alpha)f(y, t)$, puis en multipliant par $\varphi(t)$ qui est positif, on obtient $f(\alpha x + (1 - \alpha)y, t)\varphi(t) \leq \alpha f(x, t)\varphi(t) + (1 - \alpha)f(y, t)\varphi(t)$ donc en intégrant cette inégalité entre a et b , on obtient

$J(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \int_a^b [\alpha f(x, t)\varphi(t) + (1 - \alpha)f(y, t)\varphi(t)] dt = \alpha J(x) + (1 - \alpha)J(y)$, par linéarité de l'intégrale. Ceci prouve que J est convexe sur I .

4°) On intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt &= [f(t) \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t f'(t) dt \\ &= [f'(t) \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos t dt \\ &= f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} f''(t)(1 - \cos t) dt, \end{aligned}$$

or f est convexe, donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f''(t) \geq 0$ et on sait que, $1 - \cos t \geq 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt \geq 0$.

5°) Pour tout $x \in [-1, 1]$, posons $g(x) = xf(x)$. Ainsi g est une application deux fois dérivable sur $[-1, 1]$ et on calcule : $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ puis $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$.

Posons $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$: h est une application deux fois dérivable sur $[-1, 1]$ telle que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $h''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geq 0$. Ceci prouve que h est convexe sur $[-1, 1]$, donc en particulier que,

pour tout $x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{2}[h(x) + h(-x)] \geq h\left(\frac{x + (-x)}{2}\right) = h(0) = g(0) = 0$, donc en intégrant on obtient : $\int_0^1 (h(x) + h(-x)) dx \geq 0$.

h étant continue, elle possède au moins une primitive notée H .

$$\frac{d}{dx}(-H(-x)) = H'(-x) = h(-x),$$

$$\text{donc } \int_0^1 h(-x) dx = -H(-1) - (-H)(0) = H(0) - H(-1) = \int_{-1}^0 h(x) dx.$$

Ainsi l'inégalité précédente s'écrit $\int_{-1}^1 h(x) dx \geq 0$.

Or $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$, donc $0 \leq \int_{-1}^1 h(x) dx = \int_{-1}^1 xf(x) dx - \frac{1}{3}$, ce qui prouve que $\int_{-1}^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{3}$.

6°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x_1, \dots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$.

Pour $n = 1$, pour tout $x_1 \in I$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_1 = 1$, on a bien sûr $\sum_{i=1}^1 \lambda_i x_i = x_1 \in I$, ce qui prouve $S(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $S(n)$.

Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Posons $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Alors $1 - \alpha = \lambda_{n+1}$, donc α et $1 - \alpha$ sont positifs. Ainsi $\alpha \in [0, 1]$.

Supposons d'abord que $\alpha > 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1 - \alpha)x_{n+1}$, or d'après

$S(n)$, en tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in I$. De plus

$x_{n+1} \in I$, donc d'après la propriété admise en début d'énoncé,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1 - \alpha)x_{n+1} \in I.$$

Enfin, si $\alpha = 0$, alors $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$, donc $\lambda_{n+1} = 1$ et

$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in I$. Ainsi, on a prouvé $S(n+1)$ dans tous les cas.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S(n)$ est vraie, ce qu'il fallait démontrer.

6°) b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x_1, \dots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Remarquons que cet énoncé a bien un sens d'après a).

◇ Supposons d'abord que $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $R(2)$ est en particulier vraie, donc pour tout $x_1, x_2 \in I$, pour tout $\lambda_1 \in [0, 1]$, en posant $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, on a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, donc d'après $R(2)$, $f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2)$, ce qui prouve que f est convexe.

◇ Réciproquement, supposons f est convexe et montrons $R(n)$ par récurrence sur n . Pour $n = 1$, pour tout $x_1 \in I$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_1 = 1$, on a bien sûr

$$f\left(\sum_{i=1}^1 \lambda_i x_i\right) = f(x_1) = \sum_{i=1}^1 \lambda_i f(x_i), \text{ donc } R(1) \text{ est vraie.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $R(n)$. Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \quad f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right). \quad \text{Posons } \alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Alors $1 - \alpha = \lambda_{n+1}$, donc α et $1 - \alpha$ sont positifs. Ainsi $\alpha \in [0, 1]$,

or f est convexe, donc lorsque $\alpha > 0$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1 - \alpha)x_{n+1}\right) \leq \alpha f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i\right) + (1 - \alpha)f(x_{n+1}), \text{ puis}$$

$$\text{d'après } R(n), \text{ en tenant compte du fait que } \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Enfin, si $\alpha = 0$, alors $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$, donc $\lambda_{n+1} = 1$ et

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Ainsi, on a prouvé $R(n+1)$ dans tous les cas.

7°) S'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i = 0$,

alors l'inégalité est vraie car $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} = 0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Sinon, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i > 0$ et, par croissance des fonctions $\ln$ et $\exp$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \iff \ln \left[\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \right] \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \\
&\iff \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \\
&\iff (-\ln) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\ln)(x_i).
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie d'après l'inégalité de Jensen, car la fonction $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, elle est deux fois dérivable et pour tout $x > 0$,

$$(-\ln)''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0.$$

8°)

$$\prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}} \text{ est non nul et } \frac{1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}}} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_k}\right)^{\frac{1}{n}},$$

donc d'après la question 7,

$$\frac{1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+x_k}{1+x_k} = 1.$$

$$\text{Ainsi, } 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}}.$$

Partie 2 : fonctions log-convexes

9°) Posons $f(x) = \frac{1}{x^3}$. f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(f(x)) = -3\ln(x)$.

On a déjà vu que $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après la question 2, $\ln \circ f$ est convexe, ce qu'il fallait démontrer.

10°)

◇ Supposons que f est log-convexe.

Soit $x, y \in I$ et $\alpha \in [0, 1]$. $\ln \circ f$ étant convexe,

$\ln(f(\alpha x + (1-\alpha)y)) \leq \alpha \ln(f(x)) + (1-\alpha) \ln(f(y))$ donc en passant à l'exponentielle, qui est bien croissante, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq e^{\alpha \ln(f(x)) + (1-\alpha) \ln(f(y))}$, mais d'après la question 1, la fonction $\exp$ est convexe, donc $e^{\alpha \ln(f(x)) + (1-\alpha) \ln(f(y))} \leq \alpha e^{\ln(f(x))} + (1-\alpha) e^{\ln(f(y))}$.

On en déduit que $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, donc f est convexe.

◇ L'application $x \mapsto x$ est clairement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ mais

$\ln \circ f = \ln$ et $\ln$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Ainsi, la réciproque est fausse.

11°) f est log-convexe si et seulement si $(C) : (\ln \circ f)'' \geq 0$.

Pour tout $x \in I$, $(\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ puis $(\ln \circ f)''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2}$,

donc $(C) \iff \forall x \in I, f''(x)f(x) \geq f'(x)^2$.

12°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln[(fg)(x)] = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$, or d'après la question 2, la somme de deux fonctions convexes est convexe, donc $x \mapsto \ln((fg)(x))$ est convexe, ce qui prouve que fg est une application log-convexe.

13°) Soit $x \in I$. Il s'agit de montrer que $(f+g)''(x)(f+g)(x) \geq (f+g)'(x)^2$. Notons (D) cette inégalité. En notant h au lieu de $h(x)$, pour toute application h de I dans $\mathbb{R}_+$, $(D) \iff f''f + g''g + f''g + g''f \geq f'^2 + g'^2 + 2f'g'$, or d'après la question 11, $f''f \geq f'^2$ et $g''g \geq g'^2$, donc pour obtenir (D) , il suffit de montrer que $f''g + g''f \geq 2f'g'$.

On sait que $(f'g - fg')^2 \geq 0$, donc en développant, $2f'g' \leq f'^2g^2 + f^2g'^2$, or à nouveau $f''f \geq f'^2$ et $g''g \geq g'^2$, donc $2f'g' \leq f''fg^2 + g''gf^2$, puis en simplifiant par $f(x)g(x)$ qui est strictement positif, on en déduit que $2f'g' \leq f''g + g''f$ ce qui conclut.

14°) $\diamond$ Supposons que f est log-convexe sur I . Soit $a \in \mathbb{R}$.

Posons, pour tout $x \in I$, $g(x) = e^{ax}$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(g(x)) = ax$, or l'application $x \mapsto ax$ est convexe sur I car elle vérifie la définition de la convexité; dans ce cas en effet, l'inégalité à vérifier est même une égalité. Ainsi g est log-convexe, puis d'après la question 12, gf est log-convexe.

$\diamond$ Réciproquement, supposons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{ax}f(x)$ est convexe sur I . Fixons $x, y \in I$ avec $x < y$ et $t \in]0, 1[$. Posons $z = tx + (1-t)y$. Par hypothèse, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $e^{az}f(z) \leq te^{ax}f(x) + (1-t)e^{ay}f(y)$, donc $f(z) \leq te^{a(x-z)}f(x) + (1-t)e^{a(y-z)}f(y)$, or $x - z = (1-t)(x - y)$ et $y - z = t(y - x)$, donc en posant $g(a) = te^{a(1-t)(x-y)}f(x) + (1-t)e^{ta(y-x)}f(y)$, on a $f(z) \leq g(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On cherche à minimiser la quantité $g(a) : g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g'(a) = t(1-t)(x-y)[e^{a(1-t)(x-y)}f(x) - e^{ta(y-x)}f(y)]$, donc

$$\begin{aligned} g'(a) = 0 &\iff e^{a(1-t)(x-y)}f(x) = e^{ta(y-x)}f(y) \\ &\iff a(1-t)(x-y) + \ln(f(x)) = ta(y-x) + \ln(f(y)) \\ &\iff a = \frac{\ln(f(y)) - \ln(f(x))}{\frac{x-y}{x-y}}. \end{aligned}$$

Posons $a_0 = \frac{\ln(f(y)) - \ln(f(x))}{x-y} : f(tx + (1-t)y) = f(z) \leq g(a_0)$, or

$$\begin{aligned} g(a_0) &= te^{(\ln(f(y)) - \ln(f(x)))(1-t)}f(x) + (1-t)e^{t(\ln(f(x)) - \ln(f(y)))}f(y) \\ &= tf(x)\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{1-t} + (1-t)f(y)\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^t \\ &= tf(x)^t f(y)^{1-t} + (1-t)f(y)^{1-t} f(x)^t = f(x)^t f(y)^{1-t}. \end{aligned}$$

Ainsi $f(tx + (1-t)y) \leq e^{t \ln(f(x)) + (1-t) \ln(f(y))}$, puis en passant au log, on en déduit bien que f est log-convexe.

15°) On suppose à nouveau que f et g sont log-convexes. Soit $a \in \mathbb{R}$. $x \mapsto e^{ax}f(x)$ et $x \mapsto e^{ax}g(x)$ sont convexes, donc leur somme est également convexe :

$x \mapsto e^{ax}(f+g)(x)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $f+g$ est log-convexe.

16°)

◇ Soit $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

g est convexe, donc $g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$.

h est croissante, donc $(h \circ g)(tx + (1-t)y) \leq h(tg(x) + (1-t)g(y))$.

De plus, h est convexe, donc $h(tg(x) + (1-t)g(y)) \leq th(g(x)) + (1-t)h(g(y))$.

On en déduit que $(h \circ g)(tx + (1-t)y) \leq t(h \circ g)(x) + (1-t)(h \circ g)(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

◇ Une composée d'applications convexes n'est pas toujours convexe, ainsi que le prouve le contre-exemple suivant ; Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = e^{-x}$. f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, convexe car deux fois dérivable avec $f''(x) = 2x^{-3} > 0$ lorsque $x > 0$ et g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe car deux fois dérivable avec $g''(x) = e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $g \circ f$ est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On calcule $(g \circ f)'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ puis $(g \circ f)''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, donc par exemple $(g \circ f)''(1) = -e^{-1} < 0$, ce qui prouve que $g \circ f$ n'est pas convexe.

17°)

◇ Supposons que $\ln \circ f$ est convexe. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, d'après la question 2, $\alpha \ln \circ f$ est encore convexe. De plus, d'après la question 1, l'application $\exp$ est convexe et elle est croissante, donc d'après la question précédente, $f^\alpha = \exp \circ (\alpha \ln \circ f)$ est convexe.

◇ Réciproquement, supposons que, f^α est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Fixons $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\alpha \ln(f(tx+(1-t)y))} = f^\alpha(tx + (1-t)y) \leq te^{\alpha \ln(f(x))} + (1-t)e^{\alpha \ln(f(y))}$, donc $e^{\alpha \ln(f(tx+(1-t)y))} - 1 \leq t(e^{\alpha \ln(f(x))} - 1) + (1-t)(e^{\alpha \ln(f(y))} - 1)$,

or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en posant $g(v) = e^{\lambda v}$ pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$\frac{e^{\lambda u} - 1}{u} = \frac{e^{\lambda u} - e^{\lambda \times 0}}{u - 0} \xrightarrow{u \rightarrow 0} g'(0) = \lambda$, donc en divisant par α l'inégalité précédente puis en faisant tendre α vers 0, on obtient

$\ln(f(tx + (1-t)y)) \leq t \ln(f(x)) + (1-t) \ln(f(y))$, donc $\ln \circ f$ est bien convexe.

Partie III : Inégalité de Hölder

18°)

◇ Soit $q \in \mathbb{R}^*$.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \iff q = \frac{p}{p-1}$, car $p-1 \neq 0$. Ceci prouve que le réel $\frac{p}{p-1}$, qui est non nul, est l'unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

◇ On a vu que $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par définition de la convexité, $-\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq -\frac{1}{p} \ln x - \frac{1}{q} \ln y$, d'où l'on déduit l'inégalité demandée.

19°) a) Soit $t \in [a, b]$.

si $f(t) \neq 0$ et $g(t) \neq 0$, alors en appliquant la question précédente avec $x = |f(t)|^p$

et $y = |g(t)|^q$, on obtient $\ln \left(\frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln [|f(t)|^p] + \frac{1}{q} \ln [|g(t)|^q] = \ln(|f(t)|^p |g(t)|^q)$,

donc en passant à l'exponentielle, $|f(t)g(t)| \leq \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^q}{q}$.

Cette inégalité est encore vraie lorsque $f(t) = 0$ ou $g(t) = 0$,
et on conclut en intégrant cette inégalité entre a et b .

b) Utilisons dès maintenant la notation définie en question 20.

◇ Premier cas : on suppose que $\|f\|_p = 0$.

Alors $t \mapsto |f(t)|^p$ est une application positive, continue et dont l'intégrale entre a et b est nulle, donc d'après le cours, c'est l'application identiquement nulle. On en déduit

que $f = 0$, donc dans ce cas, on a bien $\int_a^b |f(t)g(t)| dt = 0 \leq 0 = \|f\|_p \|g\|_q$.

On raisonne de même lorsque $\|g\|_q = 0$.

◇ Second cas : on suppose que $\|f\|_p > 0$ et que $\|g\|_q > 0$. On peut alors appliquer l'inégalité de la question précédente en remplaçant f par $t \mapsto \frac{f(t)}{\|f\|_p}$ et g par

$t \mapsto \frac{g(t)}{\|g\|_q}$. On obtient : $\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q} dt \leq \frac{1}{p} \times \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(t)|^p dt + \frac{1}{q} \times \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_a^b |g(t)|^q dt$,

puis $\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q} dt \leq \frac{1}{p} \times \frac{1}{\|f\|_p^p} \times \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \times \frac{1}{\|g\|_q^q} \times \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc
 $\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q$, ce qu'il fallait démontrer.

20°) $\|f + g\|_p^p = \int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \leq \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} (|f(t)| + |g(t)|) dt$,

donc $\|f + g\|_p^p \leq \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |f(t)| dt + \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |g(t)| dt$, or d'après

l'inégalité de Hölder, $\int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |f(t)| dt \leq \|f\|_p \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{(p-1)q} dt \right)^{\frac{1}{q}}$.

De plus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc en multipliant par pq , $q + p = pq$ puis $(p-1)q = p$. Ainsi,

$\int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |f(t)| dt \leq \|f\|_p \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}}$ et de même,

$\int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |g(t)| dt \leq \|g\|_p \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}}$. On en déduit que

$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$.

Si $\|f + g\|_p = 0$, on a clairement $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Sinon, on peut diviser l'inégalité par $\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$ qui est strictement positif, ce qui donne

$\|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Or $p - \frac{p}{q} = \frac{pq-p}{q} = \frac{q}{q} = 1$, donc l'inégalité triangulaire est établie dans tous les cas.

21°) $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, donc si l'on pose $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$, on a $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ et $p' > 1$ (car $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{q'} < 1$). On peut donc utiliser la formule de Hölder avec p' et q' . Ainsi, $\|fg\|_r^r = \int_a^b |f(t)|^r |g(t)|^r dt \leq \| |f|^r \|_{p'} \| |g|^r \|_{q'} = \left(\int_a^b |f(t)|^{rp'} \right)^{\frac{1}{p'}} \times \left(\int_a^b |g(t)|^{rq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$. Ainsi, $\|fg\|_r^r \leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r$. On conclut en élevant cette inégalité à la puissance $\frac{1}{r}$, ce qui est correct car l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{r}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

22°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$, pour tout $f_1, \dots, f_n \in E$, on a $\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_r \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}$.

Pour $n = 1$, on a $p_1 = r$, donc la propriété est évidente.

On suppose que $n \geq 1$ et que $R(n)$ est vraie.

Soit $p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$, soit $f_1, \dots, f_{n+1} \in E$.

Notons r' l'unique réel strictement positif tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r'}$.

Ainsi, $\frac{1}{r'} + \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{r}$, donc, en posant $f = \prod_{k=1}^n f_k$, d'après la question précédente,

$$\left\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \right\|_r = \|f \times f_{n+1}\|_r \leq \|f\|_{r'} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}, \text{ or d'après } R(n), \|f\|_{r'} \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}, \text{ donc}$$

$$\left\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \right\|_r \leq \prod_{k=1}^{n+1} \|f_k\|_{p_k}, \text{ ce qui prouve } R(n+1).$$