

Feuille d'exercices 4.

Relations binaires.

Exercice 4.1 : (niveau 1)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications réelles bornées. Que peut-on dire de $\sup\{f(x) + g(x)/x \in \mathbb{R}\}$ vis-à-vis de $\sup\{f(x)/x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x)/x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 4.2 : (niveau 1)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

Pour tout $x, y \in E$, on convient que $x C y \iff (x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Ainsi, $x C y$ si et seulement si x et y sont comparables.

La relation binaire C est-elle réflexive, est-elle symétrique, est-elle transitive ?

Exercice 4.3 : (niveau 1)

On considère la relation \preceq sur \mathbb{N} définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^2, (n \preceq m) \iff \exists p \in \mathbb{N}, m = n^p.$$

Vérifier que \preceq est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 4.4 : (niveau 1)

On note G l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , bijectives et affines (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).

Lorsque f, g sont des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on convient que $f \equiv g$ si et seulement si il existe $h \in G$ tel que $f \circ h = h \circ g$.

Montrer que \equiv est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lorsque $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, décrire la classe d'équivalence de f .

Exercice 4.5 : (niveau 1)

R est une relation binaire sur un ensemble E . On suppose que R est réflexive et transitive (on dit que R est un préordre).

1°) On définit la relation binaire S par : $\forall x, y \in E, xSy \iff (xRy) \wedge (yRx)$.

Montrer que S est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in E/S$, on pose $\bar{x}\bar{R}\bar{y} \iff xRy$.

Montrer que \bar{R} est correctement définie et que c'est une relation d'ordre.

3°) Montrer que la relation R de divisibilité est un préordre sur \mathbb{Z} .

Quelles sont les classes d'équivalence de la relation S associée ?

La relation d'ordre associée est-elle totale ?

Exercice 4.6 : (niveau 2)

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers naturels a_1, \dots, a_n non nuls tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1$, avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Exercice 4.7 : (niveau 2)

Soit A une partie non vide bornée de \mathbb{R} .

Exprimer $\sup_{x,y \in A} |x - y|$ en fonction de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Exercice 4.8 : (niveau 2)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit une relation \leq_f sur \mathbb{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq_f y \iff f(y) - f(x) \geq |y - x|.$$

1°) Montrer que \leq_f est une relation d'ordre.

2°) Montrer que \leq_f est totale si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y) - f(x)| \geq |y - x|$$

3°) À quoi la relation $\leq_{\text{id}_{\mathbb{R}}}$ est-elle égale ?

Exercice 4.9 : (niveau 2)

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné. On dit que E est bien ordonné lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1°) a) Démontrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

La réciproque est-elle vraie ?

b) Démontrer qu'un ensemble fini et totalement ordonné est bien ordonné.

2°) Démontrer que si (E, \preceq) et (E, \succeq) sont bien ordonnés, alors E est un ensemble fini.

3°) On dit qu'un élément x de E admet un successeur s dans E lorsque

$$x \prec s \text{ et } \forall a \in E, (x \prec a) \implies (s \preceq a),$$

où \prec désigne l'ordre strict associé à \preceq .

a) Démontrer que si un élément x de E admet un successeur, alors celui-ci est unique. On le note $\text{succ}(x)$.

b) Dans le cas où E est bien ordonné, démontrer que, pour tout élément x de E , on a l'alternative suivante : ou bien x est un élément maximal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément plus grand que x dans E) ou bien x admet un successeur.

Exercice 4.10 : (niveau 2)

Soit E un ensemble et \mathcal{E} une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.

On suppose que, pour tout $X, Y \in \mathcal{E}$, il existe $Z \in \mathcal{E}$ tel que $Z \subset X \cap Y$.

Lorsque $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on convient que $A R B$ si et seulement si il existe $X \in \mathcal{E}$ tel que $X \cap A = X \cap B$.

Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

Déterminer la classe d'équivalence de \emptyset et de E .

Exercice 4.11 : (niveau 2)

Soit E un ensemble infini.

On note $I(E)$ l'ensemble dont les éléments sont les complémentaires des parties finies de E .

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire \mathcal{R} en convenant que, pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $X \mathcal{R} Y \iff \exists F \in I(E), X \cap F = Y \cap F$.

1°) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, montrer que $X \mathcal{R} Y$ si et seulement si $X \Delta Y$ est fini.

Exercice 4.12 : (niveau 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Toutes les suites de cet exercice seront à valeurs dans $[a, b]$. Soit (x_n) une suite.

On pose $\limsup(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$ et $\liminf(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} x_k$.

Montrer que ces notions sont bien définies et que $\limsup(x_n) \geq \liminf(x_n)$.

Soit (y_n) une seconde suite.

a) Montrer que si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$, alors

$\limsup(x_n) \leq \limsup(y_n)$ et $\liminf(x_n) \leq \liminf(y_n)$.

b) Montrer que $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$ et que

$\limsup(x_n) + \liminf(y_n) \leq \limsup(x_n + y_n)$.

c) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$: Montrer que $\limsup(x_n) \liminf(y_n) \leq \limsup(x_n y_n) \leq \limsup(x_n) \limsup(y_n)$.

Exercice 4.13 : (niveau 2)

On dit que l'égalité $n = \sum_{k=1}^p k! x_k$ est une écriture factorielle de n si et seulement si

- $p \in \mathbb{N}$,
- $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}$,
- $\forall k \in \{1, \dots, p\}, 0 \leq x_k \leq k$,
- et $x_p \neq 0$.

Montrer que tout entier naturel possède une unique écriture factorielle.

Exercice 4.14 : (niveau 3)

Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, on convient que
 $X R Y \iff \forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists y \in Y, x - \varepsilon \leq y$
et que $X S Y \iff (X R Y \text{ et } Y R X)$.

1°) Montrer que S est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$,
montrer que $X S Y$ si et seulement si $\sup_{\mathbb{R}}(X) = \sup_{\mathbb{R}}(Y)$.

3°) En déduire une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})/S$ et $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 4.15 : (niveau 3)

Lemme de Spilrajn-Marczewski :

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné fini, de cardinal n . Montrer qu'il existe une bijection croissante φ de E dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

En déduire qu'on peut munir E d'un ordre total \leq' tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,
 $x \leq y \implies x \leq' y$. Un tel ordre est appelé extension linéaire de (E, \leq) .

Exercices supplémentaires :

Exercice 4.16 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A une partie de E . On considère la relation R sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), (X R Y) \iff (X \cap A = Y \cap A).$$

1°) Démontrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer la classe d'équivalence de X .

Exercice 4.17 : (niveau 1)

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbb{R} .

1°) Démontrer que $(A \subset B) \implies (\sup A \leq \sup B)$.

2°) Démontrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.

3°) Démontrer que $A \cap B$ est majorée.

Quelle propriété peut-on établir reliant $\sup(A \cap B)$, $\sup A$ et $\sup B$?

Exercice 4.18 : (niveau 1)

On considère la relation R sur \mathbb{R} définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x R y) \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$

1°) Vérifier que R est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4.19 : (niveau 1)

On définit sur \mathbb{R} la relation binaire R par : $x R y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

1°) Montrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.20 : (niveau 1)

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E . On dit que R est symétrico-transitive lorsque, pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x R y) \wedge (y R z) \implies (z R x)$.

Démontrer que R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive et symétrico-transitive.

Exercice 4.21 : (niveau 1)

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E qui est transitive et symétrique. Démontrons que R est une relation d'équivalence, autrement dit que R est automatiquement réflexive. Soit $a \in E$. Considérons $b \in E$ tel que $a R b$. Par symétrie de R , on obtient $b R a$. Puis par transitivité de R on en déduit que $a R a$. Ainsi R est bien réflexive, ce qui démontre que c'est une relation d'équivalence.

Trouver l'erreur dans ce raisonnement ! Donner un contre-exemple.

Exercice 4.22 : (niveau 2)

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , sur lequel on définit l'ordre suivant : Pour tout $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

On pose $A = \{f_{n,p}/p \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$, où $f_{n,p}$ est l'application $x \mapsto (\sin(px))^n$.

Ainsi, A est une partie de E .

Montrer que A est une partie bornée de E .

A possède-t-elle un maximum ?

A possède-t-elle un minimum ?

A possède-t-elle une borne inférieure ?

Exercice 4.23 : (niveau 2)

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}$.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

2°) Trouver $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq C(n + 1)$.

Exercice 4.24 : (niveau 2)

Déterminer les applications f , de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , strictement croissantes telles que, $f(2) = 2$ et, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $f(pq) = f(p)f(q)$.

Exercice 4.25 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la borne inférieure de $\{(a_1 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) / a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Exercice 4.26 : (niveau 2)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E .

Pour tout $a \in A$, on note $C_A(a)$ l'ensemble des éléments de A qui sont comparables avec a .

On note B l'ensemble des $a \in A$ tels que $C_A(a)$ possède un maximum.

Montrer que l'ensemble des éléments maximaux de A est égal à $\{\max(C_A(a)) / a \in B\}$.

Exercice 4.27 : (niveau 2)

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E^E)$. On note $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) / \forall f \in \mathcal{A}, f(X) \subset X\}$.

Montrer que pour l'inclusion, toute partie non vide de \mathcal{F} admet une borne supérieure et une borne inférieure dans \mathcal{F} .

Exercice 4.28 : (niveau 2)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On dit qu'une partie X de E est libre si ses éléments sont 2 à 2 non comparables.

On note $L(E)$ l'ensemble des parties libres de E . On définit sur $L(E)$ la relation R par :

$$X R Y \iff (\forall x \in X, \exists y \in Y, x \leq y).$$

1°) Montrer que R est une relation d'ordre.

2°) Montrer que la fonction $Id_{L(E)}$ est croissante de $(L(E), \subset)$ dans $(L(E), R)$.

3°) Sa réciproque est-elle croissante?

Exercice 4.29 : (niveau 2)

Soit I un segment non vide de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer que, pour tout $\lambda \in f(I)$, $\lambda = f(\inf\{z \in I / f(z) = \lambda\})$.

Exercice 4.30 : (niveau 2)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (v_n) sont deux suites de réels, on convient que $(u_n) R (v_n)$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists p, q \geq n$, $(u_p \leq v_n) \wedge (v_q \leq u_n)$.

1°) R est-elle une relation d'ordre? Est-elle une relation d'équivalence?

2°) Notons c une suite constante. Déterminer les suites u telles que $u R c$.

Exercice 4.31 : (niveau 2)

Soit \mathcal{R} l'ensemble des relations d'équivalence définies sur un ensemble E . On dit que, R et R' étant 2 éléments de \mathcal{R} , R est plus fine que R' si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad xRy \Rightarrow xR'y.$$

a) Montrez que la relation "plus fin que" est un ordre sur \mathcal{R} et que l'ensemble ordonné \mathcal{R} a un plus grand élément et un plus petit élément.

b) Montrez que R est plus fine que R' si et seulement si toute classe modulo R' est une réunion de classes modulo R .

c) On prend $E = \mathbb{Z}$. Déterminez toutes les congruences qui sont plus ou moins fines qu'une congruence donnée.

Exercice 4.32 : (niveau 2)

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on pose :

$$A_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad G_x = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

Soit $m > 0$. On note \mathcal{M} l'ensemble $\{x \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid A_x = m\}$ et pour tout $x \in \mathcal{M}$, $\mu(x)$ le nombre d'apparitions de m dans x . On définit sur \mathcal{M} une relation \prec de la manière suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{M}, \quad x \prec y \iff G_x < G_y$$

1°) La relation \prec est-elle réflexive? transitive? antisymétrique?

2°) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$. On suppose que $\mu(x) < n$.

a) Montrer qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}_n$ tels que $x_i < m < x_j$.

b) Montrer que $x_i x_j < m(x_i + x_j - m)$.

c) En déduire l'existence d'une famille $y \in \mathcal{M}$ pour laquelle $x \prec y$ et $\mu(x) < \mu(y)$.

3°) En déduire que $G_x \leq A_x$ et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 4.33 : (niveau 2)

Soient R_1 et R_2 deux relations d'équivalence définies sur un ensemble E . On définit sur E la relation binaire $R_2 \circ R_1$ par :

$$\forall (x, z) \in E^2, x(R_2 \circ R_1)z \iff \exists y \in E \quad (xR_1y) \text{ et } (yR_2z).$$

Montrez que $R_2 \circ R_1$ est une relation d'équivalence si et seulement si $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

Exercice 4.34 : (niveau 2)

On munit $E = [0, 1] \times [0, 1]$ de l'ordre lexicographique. Montrez que toute partie non vide de E admet une borne supérieure. Ce résultat subsiste-t-il avec $E = [0, 1] \times]0, 1[$?

Exercice 4.35 : (niveau 3)

Soit f une application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) > f(f(n))$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$.

Exercice 4.36 : (niveau 3)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tout entier $n \geq 2$, au moins la moitié des termes u_1, \dots, u_{n-1} soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.

Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.

Exercice 4.37 : (niveau 3)

Soit R une relation binaire sur un ensemble E . Étant donnés deux éléments x et y de E , on dit que y est un R -antécédent de x si $y R x$.

1°) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $X \subset E$ non vide, il existe $x \in X$ n'admettant aucun R -antécédent dans X ;
2. Il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} R x_n$;
3. Pour tout $X \subset E$,

$$\left(\forall x \in E, ((\forall y \in E, (y R x \implies y \in X)) \implies x \in X) \right) \implies X = E.$$

Une relation R vérifiant ces propriétés est appelée une relation bien fondée.

2°) Montrer qu'une relation bien fondée est antireflexive (pour tout x , x n'est pas en relation avec lui-même) et antisymétrique.

3°) Une relation d'ordre \leq sur E est appelée une relation de bon ordre si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

(a) Montrer qu'une relation de bon ordre est totale.

(b) Montrer que si \leq est une relation de bon ordre, alors la relation stricte associée $<$ est une relation bien fondée.

(c) Donner un exemple de bon ordre.

Exercice 4.38 : (niveau 3)

Soit R une relation binaire sur un ensemble X , et x un élément de X .

On pose $xR = \{z \in X / x R z\}$ et $Rx = \{z \in X / z R x\}$. Ces deux ensembles sont respectivement appelés section commençante et section finissante de base x .

On définit trois relations sur E par $[x T_d y \iff yR \subset xR]$, $[x T_g y \iff Rx \subset Ry]$ et $T = T_d \cap T_g$. Ces relations sont appelées respectivement trace à droite, trace à gauche et trace.

1°) Montrer que T_d , T_g et T sont des préordres (c'est-à-dire sont réflexives et transitives).

2°) Une relation binaire R sur X est appelée un tournoi si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et si elle est totale, c'est-à-dire si deux éléments quelconques de X sont toujours comparables.

On suppose que R est un tournoi.

a) Montrer que T_d et T_g sont deux ordres égaux et contenus dans R .

b) Montrer que x est un élément minimal de (X, T) si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in R$ et $(z, y) \in R$.

c) Que dire si R est un tournoi transitif ?

Exercice 4.39 : (niveau 3)

1°) Lorsque A et B sont deux parties de \mathbb{R} , on dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si

- $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$;
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists (a, b) \in A \times B, b - a \leq \varepsilon$.

Montrer que la propriété de la borne supérieure est équivalente à la propriété suivante : Deux parties A, B de \mathbb{R} sont adjacentes si et seulement si il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(a, b) \in A \times B, a \leq c \leq b$.

2°) Montrer que la propriété de la borne supérieure est équivalent à la propriété suivante : Si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites adjacentes de réels (c'est-à-dire que l'une est croissante, l'autre décroissante et que $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$) alors elles convergent vers un même réel.

Exercice 4.40 : (niveau 3)

On note G l'ensemble des applications f de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que $f(0) = 0$

et $f(1) = 1$. Déterminer $\inf_{f \in G} \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx$.