Feuille d'exercices 3.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 3.9 :

1°) Supposons que H est solution. Alors nécessairement, pour tout $x, y \in H$, on a $x * y \in H$ et $e \in H$.
Réciproquement, si $e \in H$ et si pour tout $x, y \in H$, on a $x * y \in H$, alors la loi $*$ est correctement définie sur H et on a clairement :
- $\forall x, y, z \in H,\ \ x * (y * z) = (x * y) * z$
- et $\forall x \in H,\ \ x * e = e * x = x$,

donc $(H, *)$ satisfait les conditions attendues.

2°) Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-monoïde, donc $e \in H_i$. Ainsi, $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$.
Soit $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Soit $i \in I$. Alors $x, y \in H_i$, or H_i est un sous-monoïde, donc $x*y \in H_i$, pour tout $i \in I$. Ceci montre que $x * y \in \bigcap_{i \in I} H_i$.
En conclusion, on a montré que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-monoïde.
De la même façon, lorsque $\mathcal{M}$ est un ensemble non vide de sous-monoïdes de G, on montre que $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ est un sous-monoïde de G.

3°) Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-monoïdes de G contenant B. $G \in \mathcal{M}$, donc $\mathcal{M}$ est non vide. On peut donc poser $H = \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X$.
D'après la seconde question, H est un sous-monoïde et par construction, il contient B. En effet, si $x \in B$, pour tout $X \in \mathcal{M}$, $x \in B \subset X$, donc $x \in X$, ce qui prouve bien que $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X = H$.
De plus, si Y est un sous-monoïde contenant B, alors $Y \in \mathcal{M}$, donc $H = \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X \subset Y$.
Ainsi, au sens de l'inclusion, H est bien le plus petit sous-monoïde de G contenant B. On dit que c'est le sous-monoïde de G engendré par B.

4°) D'après la convention de l'énoncé, $e \in M(B)$.

Soit $x, y \in M(B)$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_{n+m} \in B$ tels que $x = x_1 * \cdots * x_n$ et $y = x_{n+1} * \cdots * x_{n+m}$, donc par associativité, $x * y = x_1 * \cdots * x_{n+m}$, ce qui prouve que $x * y \in M(B)$.
On a prouvé que $M(B)$ est un sous-monoïde de G.
Il est clair que pour tout $x_1 \in B$, $x_1 \in M(B)$, donc $B \subset M(B)$.
Soit maintenant N un sous-monoïde de G contenant B.
Par récurrence sur n, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in B$, $x_1 * \cdots * x_n \in N$, car $e \in N$ (ce qui prouve la propriété pour $n = 0$) et car N est stable par $*$. Ainsi, $M(B) \subset N$.
On a donc prouvé que $M(B)$ est le plus petit sous-monoïde de G contenant B.
Remarque : La question 4 fournit une seconde preuve pour la question 3.

Exercice 3.10 :

1°) On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et n ensembles $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1$.
Posons $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $y \in x$. Il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $y = x_i$. Alors, en convenant que $x_0 = x_n$, on a $x_{i-1} \in x_i = y$, donc $x_{i-1} \in y \cap x$ ce qui prouve que $y \cap x \neq \emptyset$, pour tout $y \in x$. Or x est non vide, donc ceci contredit l'axiome de fondation, ce qui permet de conclure.

Remarque : On peut aller un peu plus loin pour comprendre ce que signifie l'axiome de fondation : s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$, alors en posant $x = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, on montre que pour tout $y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$, donc l'axiome de fondation est faux.
Réciproquement, si l'on suppose faux l'axiome de fondation, il existe un ensemble x non vide tel que, pour tout $y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$.
x étant non vide, il existe $x_0 \in x$. Alors $x_0 \cap x \neq \emptyset$, donc il existe $x_1 \in x_0 \cap x$.
$x_1 \in x$, donc il existe $x_2 \in x_1 \cap x$.
À l'aide du principe de récurrence, on en déduit l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$.
Ainsi l'axiome de fondation équivaut à l'inexistence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles qui est "décroissante" pour la relation d'appartenance. C'est pourquoi cet axiome s'appelle l'axiome de "fondation", par analogie avec le fait qu'un ordre est dit bien fondé si et seulement si il n'admet aucune suite infinie strictement décroissante.

2°) Notons $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{P}(M) \ / \ (0 \in A) \wedge (s(A) \subset A)\}$: $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties de M contenant 0 et closes par successeur. L'énoncé propose de poser $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$.
M contient 0 et M est clos par successeur, donc $\mathcal{N} \neq \emptyset$, donc l'intersection précédente est bien définie et l'égalité $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$ définit bien l'ensemble N. Montrons qu'il vérifie les axiomes de Peano.

— Pour tout $A \in \mathcal{N}$, $0 \in A$, donc $0 \in N$.
  Pour tout $x \in N$, x est un ensemble donc $s(x)$ est défini.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. $s(n) = n \cup \{n\}$, donc $n \in s(n)$, donc $s(n) \neq \emptyset$. Ainsi, $s(n) \neq 0$.

— Soit F une partie de N telle que $0 \in F$ et $s(F) \subset F$. Alors $F \in \mathcal{N}$, or $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$, donc $N \subset F$. Or $F \subset N$, donc $F = N$.

— Soit $n, m \in N$ tels que $s(n) = s(m)$. Supposons que $n \neq m$.
$n \in \{n\} \subset \{n\} \cup n = s(n)$, donc $n \in s(m) = m \cup \{m\}$, mais $n \neq m$, donc $n \in m$. De même, on montre que $m \in n$, donc $n \in m \in n$, or c'est impossible d'après la première question. On en déduit que $n = m$, ce qui conclut.

Exercice 3.17 :

1°) Soit P et Q deux formules propositionnelles. On dit que P est incompatible avec Q si et seulement si P et Q ne sont pas vraies en même temps, donc si et seulement si $\neg(P \wedge Q)$, c'est-à-dire si et seulement si $(P \mid Q)$ d'après une loi de Morgan.

2°) On notera "$\equiv$" l'équivalence logique : "$P \equiv Q$" signifie donc que, pour toute distribution de valeurs de vérité, "$P \iff Q$".
$\diamond$ $(P|P) \equiv (\overline{P} \vee \overline{P}) \equiv \neg P$.
$\diamond$ $(\overline{P}|\overline{Q}) \equiv (P \vee Q)$, donc $(P \vee Q) \equiv ((P|P)|(Q|Q))$.
$\diamond$ $(P \wedge Q) \equiv \overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$, or $\neg$ et $\vee$ s'expriment uniquement en fonction de la barre de Scheffer, donc c'est encore le cas pour $\wedge$.
Plus précisément, $(P \wedge Q) \equiv \overline{(P|Q)} \equiv ((P|Q)|(P|Q))$,
$\diamond$ $(P \implies Q) \equiv \overline{P \wedge \overline{Q}}$ donc $\implies$ s'exprime uniquement en fonction de la barre de Scheffer. Plus précisément, $(P \implies Q) \equiv \overline{(P \wedge \overline{Q})} \equiv \overline{P} \vee \overline{\overline{Q}} \equiv (P|\overline{Q}) \equiv (P|(Q|Q))$.

Exercice 3.18 :

Pour chaque question, on écrit formellement la phrase de l'énoncé, on la nie "mécaniquement", puis on interprète cette négation.

1°) Notons DS l'ensemble des devoirs surveillés, chaque devoir étant considéré comme un ensemble de questions. Ainsi, la phrase "dans chaque devoir surveillé, il y a toujours une question qu'aucun élève ne sait résoudre" s'écrit
$\forall d \in DS,\ \exists q \in d,\ \forall e \in C,\ \neg(e\ R\ q)$, où C est la classe et où $e\ R\ q$ signifie que l'élève e sait résoudre la question q. La négation de cette phrase donne
$\exists d \in DS,\ \forall q \in d,\ \exists e \in C,\ e\ R\ q$. Elle signifie qu'il existe un devoir surveillé dont chaque question a été résolue par au moins élève.

2°) Notons BS la barre scientifique et BG la barre générale d'un candidat aux Mines en 2022 et A l'assertion affirmant que le candidat est admissible. La phrase "pour être admissible aux Mines en 2022, il suffisait d'avoir au moins 177 points à la barre scientifique et 363 points à la barre générale" s'écrit
$(BS \geq 177) \wedge (BG \geq 363) \implies A$. Sa négation s'écrit
$(BS \geq 177) \wedge (BG \geq 363) \wedge \neg A$, laquelle phrase signifie qu'un candidat peut avoir une barre scientifique supérieure à 177 et une barre générale supérieure à 363 sans être admissible.

3°) Notons $C(e)$ l'ensemble des colles de l'élève e et $c(e)$ la note de l'élève e lors de la colle c. La phrase "l'an dernier en MPSI2, certains élèves ont eu au moins 12 à toutes leurs colles de maths" s'écrit
$\exists e \in MPSI2, \ \forall c \in C(e), \ c(e) \geq 12$. La négation de cette phrase est
$\forall e \in MPSI2, \ \exists c \in C(e), \ c(e) < 12$, ce qui signifie que tous les élèves de MPSI2 ont vécu au moins une colle où leur note fut strictement inférieure à 12.