

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 3 : du lundi 6 octobre au vendredi 10 octobre.

Liste des questions de cours

- 1°) Présenter le paradoxe de Russell.
- 2°) Montrer que $A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$.
- 3°) Donner une définition du couple (a, b) . Montrer que $(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$.
- 4°) Expliquer la différence entre les formules
“ $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$ ” et “ $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$ ”.
- 5°) A l’aide d’une table de vérité, démontrer l’une des lois de Morgan.
- 6°) Proposer plusieurs méthodes pour montrer que $(A \wedge B) \implies C$ est logiquement équivalente à
 $(A \implies B) \implies (A \implies C)$.
- 7°) Traduire la non-convergence d’une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels vers 0 :
 $\neg[\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |x_n| \leq \varepsilon]] \iff \dots$.

Les thèmes de la semaine : Révisions, ensembles et logique

1 Révisions : dérivation et intégration

On pourra poser des exercices portant sur le programme des semaines 1 et 2.

2 Les ensembles

2.1 Vocabulaire

Appartenance et inclusion. Parties d’un ensemble.
Prédicat, différentes manières de définir un ensemble.
Paradoxe de Russell.
Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$.

2.2 Opérateurs sur les ensembles

Intersection, réunion, union disjointe, différence ensembliste, différence symétrique, complémentaire.
Propriétés d’associativité et de distributivité relativement à l’union et l’intersection.
Produit cartésien de n ensembles.

3 Récurrence

Définition de $\mathbb{N}$ par les axiomes de Peano.
Principe de récurrence.

4 Formules propositionnelles

Les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg, \implies$ et $\iff$.
Définition inductive des formules propositionnelles.
Valeurs de vérité d'une formule propositionnelle, tables de vérité.
Condition nécessaire, condition suffisante.
Exemples de tautologies : associativité et distributivité relativement à $\wedge$ et $\vee$, lois d'absorption, loi de Morgan, contraposition, modus ponens.
Propositions logiquement équivalentes.
Négation d'une proposition, éventuellement avec quantificateurs.
Propriétés sur le complémentaire d'une union ou d'une intersection.

Prévision pour la semaine prochaine :

Relations binaires, relations d'ordre et relations d'équivalence.