

DS 2

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition puis simplifier la quantité $\tan(2 \arccos(x))$.

Exercice 2 :

Sans en rechercher le domaine de définition,
calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{\sin \frac{1}{x}}{\ln^3 x}$.

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_1^e t^n \ln^2(t) dt$.

Exercice 4 :

Calculer $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx$.

Problème : La constante d'Euler

Partie I : Définition de γ

1°) Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$.

Montrer que $\sum_{p=n}^m (x_p - x_{p+1}) = x_n - x_{m+1}$.

Simplifier de même la quantité $\sum_{p=n+1}^m (x_{p-1} - x_p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$ et $S_n = \sum_{p=1}^n a_p$.

2°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3°) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on notera γ et qui est appelé la constante d'Euler. Montrer que $\gamma \in [0, 1]$.

4°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq a_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$.

5°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$.

6°) Montrer que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 1$.

En déduire que $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_1(n)}{n}$, où $(\varepsilon_1(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

7°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_2(n)}{n}$, où $(\varepsilon_2(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II : Intégrer entre 0 et $+\infty$.

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est définie et on pose $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \ell$.

8°) Montrer que les intégrales suivantes sont définies et préciser leurs valeurs :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$$

9°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux applications de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ est définie et que, pour tout $t \in [a, +\infty[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est également définie et que $0 \leq \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$.

10°) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$ sont définies.

11°) Soit f une application de classe C^∞ , définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$: il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral.

12°) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon_3(t)$, où $\varepsilon_3(t)$ est une application définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varepsilon_3(t) \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} 0$.

13°) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, notons $g(t) = \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}$.

Déduire de la question précédente que $g(t)$ converge vers un réel que l'on déterminera, lorsque t tend vers 0. On note alors $g(0)$ ce réel, si bien que g devient une application définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est une application continue de $]0, a]$ dans $\mathbb{R}$. Lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^a f(t) dt \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \ell$, on dit que $\int_0^a f(t) dt$ est définie et on pose $\int_0^a f(t) dt = \ell$.

Définition 3 : On suppose que f est une application continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est définie si et seulement si $\int_0^1 f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont définies et dans ce cas, on pose $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt$.

14°) Soit f_1 et f_2 deux applications continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f_1(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f_2(t) dt$ sont définies.

Montrer que $\int_0^{+\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) dt$ sont définies et

que $\int_0^{+\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) dt = a_1 \int_0^{+\infty} f_1(t) dt + a_2 \int_0^{+\infty} f_2(t) dt$.

Partie III : Une expression de γ sous forme intégrale.

15°) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ est définie.

16°) Montrer que, pour tout $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

17°) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} \ln b - \ln a$.

Montrer que $\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

18°) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$.

Définition 4 : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels définie pour tout entier $n \geq n_0$. Lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=n_0}^N x_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \ell$, on dit que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ est définie et

on pose $\ell = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$.

19°) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$ et $\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right)$.

20°) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $h(t) = 1 - \frac{1 - e^{-t}}{t}$.

Montrer que $h(t) \xrightarrow[t < 0]{t \rightarrow 0} 0$.

Ainsi, en posant $h(0) = 0$, h devient une application continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(t) \geq 0$.

Montrer que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $h(t) \leq 2$.

Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t) \leq \frac{t}{2}$.

21°) En admettant que l'on peut intervertir les deux opérateurs " $\int_0^{+\infty}$ " et " $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ",

montrer que $\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

22°) Montrer que pour justifier l'interversion précédemment admise, il suffit d'établir

que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t} h(t) \right) dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$.

23°) Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t} h(t) \right) dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$.

24°) Justifier l'interversion effectuée en question 21.