DS 2 : un corrigé

Barème

Le barème comporte 67 points dont voici la répartition :

- Exercices (11 points) : 4,1,3,3.
- Partie I (15 points) : 1, 1,2,1,2,2,1,2,3.
- Partie II (14 points) : 2,2,2,2,3,2,1.
- Partie III (27 points) : 2,2,4,1,1,4,3,3,3,4.

Exercices

Exercice 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(2\arccos(x))$ est définie si et seulement si $\arccos(x)$ est défini (i.e $x \in [-1,1]$) et $2\arccos(x) \notin (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.
Supposons donc que $x \in [-1,1]$ et posons $\theta = \arccos(x) \in [0,\pi]$. Alors $2\theta \in [0,2\pi]$, donc $2\theta \in (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \iff \theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\} \iff x = \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, l'expression de l'énoncé est définie si et seulement si $x \in D$, où $\boxed{D = [-1,1] \setminus \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}}$.
Soit $x \in D$. Posons à nouveau $\theta = \arccos(x) \in [0,\pi]$.
$\tan(2\arccos(x)) = \tan(2\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta - 1}$.
$\theta \in [0,\pi]$, donc $\sin\theta \geq 0$. Ainsi, $\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$, or $\cos\theta = x$, donc $\boxed{\tan(2\arccos(x)) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}}$.

Exercice 2 :

En notant f la fonction de l'énoncé, on calcule : $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}(\cos\frac{1}{x})\ln^3 x - \frac{3}{x}\ln^2 x \sin\frac{1}{x}}{\ln^6 x}$,
donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{(\cos\frac{1}{x})\ln x + 3x\sin\frac{1}{x}}{x^2\ln^4 x}}$.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_1^e t^n \ln^2(t)dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2 t\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{2}{t}\ln t dt \\
&= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1}\Big(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}dt\Big) \\
&= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1}\Big(\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^e\Big). \text{ Ainsi,} \\
\int_1^e t^n \ln^2(t)dt &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^2} + 2\frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^3} \\
&= \frac{e^{n+1}}{(n+1)^3}(n^2+2n+1-2(n+1)+2) - \frac{2}{(n+1)^3},
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\int_1^e t^n \ln^2(t)dt = \frac{e^{n+1}(n^2+1)-2}{(n+1)^3}}$.

Exercice 4 :

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 < 0$, donc il s'agit bien de l'intégrale d'une application continue sur $[-1, 1]$.

$I = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1}{x^2+2x+5}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^2+4}$, donc

$I = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{4} - \frac{1}{2}\left[\arctan(\frac{x+1}{2})\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \arctan 1)$, donc $\boxed{I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{8}}$.

Problème : La constante d'Euler

Partie I : définition de γ

1°) $\diamond$ $\sum_{p=n}^m (x_p - x_{p+1}) = \sum_{p=n}^m x_p - \sum_{p=n}^m x_{p+1}$.

Dans la dernière somme, effectuons le changement de variables $q = p + 1$. Alors

$\sum_{p=n}^m (x_p - x_{p+1}) = \sum_{p=n}^m x_p - \sum_{q=n+1}^{m+1} x_p = x_n + \sum_{p=n+1}^m x_p - \sum_{q=n+1}^m x_q - x_{m+1}$,

ainsi on a bien $\sum_{p=n}^m (x_p - x_{p+1}) = x_n - x_{m+1}$.

$\diamond$ Un calcul similaire donne

$\sum_{p=n+1}^m (x_{p-1} - x_p) = \sum_{p=n}^{m-1} x_p - \sum_{p=n+1}^m x_p$, donc $\boxed{\sum_{p=n+1}^m (x_{p-1} - x_p) = x_n - x_m}$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{n}$, donc par croissance de l'intégrale,

$\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\, dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dt = \frac{1}{n}$,

donc $0 \leq a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3°) Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$, donc la suite (S_n) est croissante.

De plus, d'après la question précédente, puis d'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_n \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$.

On a donc montré que la suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel, noté γ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq S_n \leq 1$, donc en passant à la limite, on en déduit que $0 \leq \gamma \leq 1$.

4°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+n}\, dt = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(t+n)-n}{t+n}\, dt = \frac{1}{n}\int_0^1 \Big(1 - \frac{n}{t+n}\Big)\, dt = \frac{1}{n} - \int_0^1 \frac{dt}{t+n}$. Dans cette dernière intégrale, on pose $x = t+n$. Alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+n}\, dt = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = a_n$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Pour tout $t \in [0,1]$, $n \leq t+n \leq n+1$, donc par croissance de l'intégrale,

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{n+1}\, dt \leq a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{t+n}\, dt \leq \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{n}\, dt$, or $\displaystyle\int_0^1 t\, dt = \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$,

donc $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n(n+1)} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

Or $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{2n^2} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\Big)$.

Ainsi, on a montré que $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\Big) \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\Big)$.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \geq n+1$. Alors $S_m - S_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{m} a_p$ donc d'après la question précédente, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=n+1}^{m} \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\Big) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m} \Big(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\Big)$,

puis $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{m+1}\Big) \leq S_m - S_n \leq \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\Big)$.

Faisons maintenant tendre m vers $+\infty$: on obtient bien $\dfrac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \dfrac{1}{2n}$.

6°) $\diamond$ $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \Big[\dfrac{d}{dx}(\ln(1+x))\Big](0) = 1$.

$\diamond$ Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\varepsilon_1(n) = n\Big(\ln(n+1) - \ln n - \dfrac{1}{n}\Big)$, de sorte qu'on peut écrire $\ln(n+1) = \ln n + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\varepsilon_1(n)}{n}$. Alors, il s'agit de montrer que $\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\varepsilon_1(n) = n\ln(1+\frac{1}{n}) - 1$. De plus, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par changement de variable dans la limite précédente, $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On en déduit bien que $\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles,
$S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\Big(\frac{1}{p} - \int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\Big) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \int_1^{n+1}\frac{dt}{t}$, donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} = S_n + [\ln t]_1^{n+1}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} = S_n + \ln(n+1)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} &= (S_n - \gamma + \frac{1}{2n}) + \gamma - \frac{1}{2n} + \Big(\ln n + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_1(n)}{n}\Big)\\
&= \frac{\varepsilon_1(n) + n(S_n - \gamma + \frac{1}{2n})}{n} + \gamma + \frac{1}{2n} + \ln n\\
&= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_2(n)}{n},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_2(n) = \varepsilon_1(n) + n(S_n - \gamma + \dfrac{1}{2n})$.

Il reste à montrer que $\varepsilon_2(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or d'après la question 5,

$0 \le n(S_n - \gamma + \dfrac{1}{2n}) \le n\Big(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+2}\Big) = \dfrac{2n}{2n(2n+2)} = \dfrac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors, d'après le principe des gendarmes, $n(S_n - \gamma + \dfrac{1}{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or $\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\varepsilon_2(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie II : Intégrer entre 0 et $+\infty$.

8°) $\diamond$ L'application $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$. Alors $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ est définie et $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = 1}$.

$\diamond$ De même, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_1^x = \arctan x - \frac{\pi}{4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ est définie et $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}}$.

$\diamond$ $\displaystyle\int_1^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_1^x = \frac{1}{e} - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est définie et $\boxed{\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{e}}$.

9°) Soit $x \in]a,+\infty[$. Par croissance de l'intégrale, $0 \le \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^x g(t)\,dt$, or $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est définie donc $\int_a^x g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^{+\infty} g(t)\,dt \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante : en effet, sa dérivée est égale à f qui est positive. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, il existe $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ telle que $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient donc $0 \le L \le \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$, ce qui prouve que $L\in\mathbb{R}$. Ainsi, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est bien définie et $0 \le L = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \le \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$.

10°) $\diamond$ Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $0 \le \frac{e^{-t}}{t} \le e^{-t}$, or d'après la question 8, $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est définie, donc d'après la question précédente, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est définie.

$\diamond$ Soit $t \in [1,+\infty[$.

$t \ge 1$ donc $-t \le -1$ puis $e^{-t} \le \frac{1}{e}$. Ainsi, $1-e^{-t} \ge 1-\frac{1}{e}$ puis $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \le \frac{e^{-t}}{1-\frac{1}{e}}$, mais d'après la question 8, $\int_1^x \frac{e^{-t}}{1-\frac{1}{e}}\,dt = \frac{1}{1-\frac{1}{e}}\int_1^x e^{-t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e-1}$, donc d'après la question précédente, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$ est définie.

11°) Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$
Pour $n=0$, $f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt = f(b)$ d'après le cours, car f est de classe C^1, ce qui prouve $R(0)$.
Supposons maintenant que $R(n)$ est vrai. Par intégration par parties, $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$, donc d'après $R(n)$, $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$, ce qui prouve $R(n+1)$.
On conclut grâce au principe de récurrence.

12°) Soit $t\in\mathbb{R}$. On applique la question précédente à l'application exponentielle entre 0 et t. Ainsi, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_3(t)$, en posant $\varepsilon_3(0)=0$ et, lorsque $t\neq 0$, $\varepsilon_3(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{(t-x)^2}{2} e^x\,dx$. Supposons que $t \neq 0$. Alors par inégalité triangulaire,

$$0 \le |\varepsilon_3(t)| \le \frac{1}{t^2}\int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)} \frac{|t-x|^2}{2}e^x\ dx \le \frac{1}{t^2}\int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)} \frac{|t|^2}{2}e^{|t|}dx = \frac{1}{2}e^{|t|}|t| \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 0.$$
D'après le principe des gendarmes, $\varepsilon_3(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. $g(t) = \dfrac{1}{1-(1-t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_3(-t))} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{t}\Big(\dfrac{1}{1-\frac{t}{2}-t\varepsilon_3(-t)} - 1\Big)$,

donc $g(t) = \dfrac{1}{t}\dfrac{1-(1-\frac{t}{2}-t\varepsilon_3(-t))}{1-\frac{t}{2}-t\varepsilon_3(-t)} = \dfrac{\frac{1}{2}+\varepsilon_3(-t)}{1-\frac{t}{2}-t\varepsilon_3(-t)}$, donc $\boxed{g(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}$.

14°) Pour tout $x > 1$, par linéarité de l'intégrale,
$$\begin{aligned}\int_1^x (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt &= a_1\int_1^x f_1(t)\ dt + a_2\int_1^x f_2(t)\ dt\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_1\int_1^{+\infty} f_1(t)\ dt + a_2\int_1^{+\infty} f_2(t)\ dt,\end{aligned}$$
donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt$ est définie et
$$\int_1^{+\infty} (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt = a_1\int_1^{+\infty} f_1(t)\ dt + a_2\int_1^{+\infty} f_2(t)\ dt.$$
De même, on montre que $\displaystyle\int_0^1 (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt$ est définie

et $\displaystyle\int_0^1 (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt = a_1\int_0^1 f_1(t)\ dt + a_2\int_0^1 f_2(t)\ dt.$

On en déduit en sommant ces intégrales que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt$ est définie

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\ dt = a_1\int_0^{+\infty} f_1(t)\ dt + a_2\int_0^{+\infty} f_2(t)\ dt.$

Partie III : Une expression de γ sous forme intégrale.

15°) Posons $g(0) = \frac{1}{2}$ et notons $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & e^{-t}g(t)\end{array}$. h est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc elle possède une primitive sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera H. Alors pour tout $x \in]0,1[$,
$\displaystyle\int_x^1 e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\ dt = H(1)-H(x) \underset{\substack{x\to 0\\ 0<x<1}}{\longrightarrow} H(1)-H(0)$, car H étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0.

De plus, d'après la question 10, pour $x > 1$,
$$\begin{aligned}\int_1^x e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\ dt &= \int_1^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\ dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\ dt\\ &\underset{\substack{x\to+\infty\\ x>1}}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\ dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\ dt \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
Ainsi, d'après la définition de l'énoncé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\ dt$ est définie.

16°) Soit $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $u = at$ et $v = bt$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt &= \int_x^y \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}\,dt \\ &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a} - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{b}}\,\frac{du}{b} \\ &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Alors, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.\end{aligned}$$

17°) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Premier cas : Supposons que $a < b$.

Soit $x > 0$. Par décroissance de l'application $t \longmapsto e^{-t}$,

pour tout $t \in [ax, bx]$, $\dfrac{e^{-bx}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{e^{-ax}}{t}$, donc par croissance de l'intégrale,

$e^{-bx} \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq e^{-ax} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt$, donc

$e^{-bx}[\ln t]_{ax}^{bx} \leq \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq e^{-ax}[\ln t]_{ax}^{bx}$,

puis $e^{-bx} \ln \dfrac{b}{a} \leq \displaystyle\int_{bx}^{ax} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq e^{-ax} \ln \frac{b}{a}$.

Or, $e^{-bx} \ln \frac{b}{a} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} \ln b - \ln a$ et $e^{-ax} \ln \frac{b}{a} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} \ln b - \ln a$,

donc d'après le principe des gendarmes, $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} \ln b - \ln a$.

De plus, $e^{-bx} \ln \frac{b}{a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{-ax} \ln \frac{b}{a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc toujours d'après le principe des gendarmes, $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Second cas : Supposons que $a > b$. Alors d'après le premier cas,

$\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\int_{bx}^{ax} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} -(\ln a - \ln b) = \ln b - \ln a$.

De même, on montre que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

18°) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. D'après les deux questions précédentes,

pour $x \in]0, 1[$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{\substack{x \to 0 \\ 0<x<1}}{\longrightarrow} \ln \frac{b}{a} - \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt$,

et, pour $y > 1$, $\displaystyle\int_1^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{\substack{y \to +\infty \\ y > 1}}{\longrightarrow} \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

Ainsi, d'après la définition de l'énoncé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ est définie et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a} - \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$.

19°) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$\diamond$ $e^{-t} \in]0,1[$ donc d'après le cours, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{N} (e^{-t})^n = \frac{1-(e^{-t})^{N+1}}{1-e^{-t}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-e^{-t}},$$

donc d'après la définition 4, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$ est définie et $\displaystyle\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$.

$\diamond$ Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{e^{-nt}-e^{(n+1)t}}{t}\Big) = \frac{1}{t}(e^0 - e^{(N+1)t}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t}$,

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{-nt}-e^{(n+1)t}}{t}\Big)$ est définie et $\displaystyle\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{-nt}-e^{(n+1)t}}{t}\Big)$.

20°) $\diamond$ $\displaystyle\frac{e^{-t}-1}{t} = \frac{e^{-t}-e^{-0}}{t-0} \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\longrightarrow} \Big[\frac{d}{dx}(e^{-x})\Big](0) = -1$, donc $h(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\longrightarrow} 0$.

$\diamond$ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$h(t) \geq 0 \iff \dfrac{1-e^{-t}}{t} \leq 1 \iff e^{-t} \geq 1-t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $k(x) = e^x - 1 - x$. k est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = e^x - 1$, donc k est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) \geq k(0) = 0$. Ceci démontre l'inégalité classique suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1$. En particulier, $e^{-t} \geq 1-t$, donc $h(t) \geq 0$.

$\diamond$ Soit $t \in [1,+\infty[$. Alors $h(t) = \dfrac{t-1}{t} + \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{t}{t} + \dfrac{e^{-t}}{1} \leq 1+1 = 2$.

$\diamond$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $a(t) = \dfrac{t^2}{2} - (e^{-t} - 1 + t)$. a est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $a'(t) = t - (-e^{-t}+1) = e^{-t}+t-1$, or on vient de montrer que $e^{-t} \geq 1-t$, donc $a'(t) \geq 0$. Ainsi, a est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $a(t) \geq a(0) = 0$. Ceci montre que $e^{-t} - 1 + t \leq \frac{t^2}{2}$, donc en divisant par t, que $h(t) \leq \frac{t}{2}$. C'est en particulier vrai pour tout $t \in [0,1]$.

21°) $\diamond$ Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\Big(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\Big) &= e^{-t}\sum_{n=0}^{N} e^{-nt} - e^{-t}\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\Big)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - e^{-t}\frac{1}{t},\end{aligned}$$

donc $\displaystyle e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\Big)$. Alors, en admettant l'interversion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\Big(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\Big)\,dt$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int e^{-(n+1)t}\,dt = -\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}$,

donc $\displaystyle\int_x^1 e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} - \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1} - \frac{e^{-(n+1)}}{n+1}$

et $\displaystyle\int_1^x e^{-(n+1)t}\,dt = -\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} + \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-(n+1)}}{n+1}$. Ceci démontre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt$ est bien définie et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{1}{n+1}$.

$\diamond$ D'après la question 17, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\,dt$ est définie et est égale à $\ln(\frac{n+2}{n+1})$.

Alors d'après la question 14, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\Big)\,dt$ est également définie et est égale à $\displaystyle\frac{1}{n+1} - \ln\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n+1} - \ln\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)\Big)$,

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t} = \frac{1}{n} - \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$,

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}$.

D'après la question 3, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est définie et est égale à γ. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_{n+1}$, donc en passant à la limite, on montre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}$ est aussi définie et est égal à γ. On a donc bien prouvé que $\displaystyle\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\,dt$, à la condition de justifier l'interversion.

22°) $\diamond$ Il s'agit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\,dt$.
On a déjà démontré que toutes les quantités qui interviennent dans cette égalité sont bien définies. D'après la définition 4, ceci revient à prouver que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\,dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt$. Or, d'après la question 14 étendue par récurrence au cas d'un nombre fini de termes, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{N} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt$, donc il suffit d'établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{N} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt - \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Toujours d'après la

question 14, il s'agit d'établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t) - \sum_{n=0}^{N} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $P > N$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{P} e^{-(n+1)t}h(t) &= \sum_{n=0}^{P} e^{-(n+1)t}h(t) - \sum_{n=0}^{N} e^{-(n+1)t}h(t)\\ &\underset{P\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t) - \sum_{n=0}^{N} e^{-(n+1)t}h(t) \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)$ est définie et est égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t) - \sum_{n=0}^{N} e^{-(n+1)t}h(t)$.

Il s'agit donc bien de démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

23 et 24°) Soit $N \in \mathbb{N}$.
◇ Soit $t \in [1, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N+1$. Pour tout $P > N+1$,
$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{P} e^{-(n+1)t}h(t) = h(t)e^{-(N+2)t} \sum_{n=0}^{P-N-2} (e^{-t})^n = h(t)e^{-(N+2)t}\frac{1-e^{-(P-N-1)t}}{1-e^{-t}}$, donc, en faisant tendre P vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t) = e^{-(N+2)t}g(t)$.
◇ $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq A$, $|g(x)-1| \leq 1$.
En particulier, pour tout $x \geq A$, $g(x) \leq 2$.
De plus d'après la question 13, g est continue sur le segment $[0, A]$, donc d'après le cours, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in [0, A]$, $g(x) \leq M$.
Posons $C = \max(2, M)$. D'après la question 20, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \dfrac{h(x)}{1-e^{-x}} \geq 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq g(x) \leq C$.
◇ Pour $x > 1$,
$\displaystyle\int_1^x Ce^{-(N+2)t}\,dt = -C\Big[\frac{e^{-(N+2)t}}{N+2}\Big]_1^x = C\frac{e^{-(N+2)}}{N+2} - C\frac{e^{-(N+2)x}}{N+2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} C\frac{e^{-(N+2)}}{N+2} \in \mathbb{R}$,
donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} Ce^{-(N+2)t}\,dt$ est définie et $\displaystyle\int_1^{+\infty} Ce^{-(N+2)t}\,dt = C\frac{e^{-(N+2)}}{N+2}$. Alors d'après la question 9, $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt \leq \int_1^{+\infty} Ce^{-(N+2)t}\,dt$,

donc (1) : $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt \leq C\frac{e^{-(N+2)}}{N+2}$.
◇ Pour tout $x \in]0, 1[$,
$0 \leq \displaystyle\int_x^1 \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)\Big)\,dt \leq \int_x^1 Ce^{-(N+2)t}\,dt = -C\frac{e^{-(N+2)}}{N+2} + C\frac{e^{-(N+2)x}}{N+2}$, donc en faisant tendre x vers 0, on obtient que

(2) : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t} h(t) \Big)\ dt \leq -C \frac{e^{-(N+2)}}{N+2} + \frac{C}{N+2}$.

◇ Sommons les inégalités (1) et (2). On obtient que

$0 \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t} h(t) \Big)\ dt \leq \frac{C}{N+2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, d'après le principe des gendarmes, on a prouvé que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-(n+1)t} h(t) \Big)\ dt \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Commentaires : Ce sujet est largement inspiré de l'épreuve du Capes externe de 2010, dans laquelle on trouvera d'autres formules pour γ. En particulier, au prix de quelques calculs élémentaires, on peut déduire de la formule obtenue en question 21 une formule plus concise : $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\ dt$.