Feuille d'exercices 4.
Corrigé de deux exercices.

Exercice 4.11 :

1°) Soit $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$.
$E \in I(E)$ et $X \cap E = X \cap E$, donc $X\mathcal{R}X$.
On a clairement $X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow Y\mathcal{R}X$.
Supposons que $X\mathcal{R}Y$ et que $Y\mathcal{R}Z$:
Il existe $F, G \in I(E)$ tels que $X \cap F = Y \cap F$ et $Y \cap G = Z \cap G$.
Alors $X\cap(F\cap G) = (X\cap F)\cap G = (Y\cap F)\cap G = (Y\cap G)\cap F = (Z\cap G)\cap F = Z\cap(F\cap G)$,
or, en notant $\overline{A}$ le complémentaire dans E d'une partie A de E, on a $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$.
$F, G \in I(E)$, donc $\overline{F}$ et $\overline{G}$ sont finies. On en déduit que $F \cap G \in I(E)$, donc que $X\mathcal{R}Z$.
Ceci prouve que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, donc c'est une relation d'équivalence.

2°) Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.
$\diamond$ Supposons que $X\Delta Y$ est fini. Posons $F = \overline{X\Delta Y}$: $F \in I(E)$.
Soit $x \in X \cap F$. Alors $x \in X$ et $x \notin X\Delta Y$, donc $x \in X \cap Y$. Réciproquement, si $x \in X \cap Y$, alors $x \in X$ et $x \notin X\Delta Y$, donc $X \cap F = X \cap Y$. De même, $Y \cap F = Y \cap X$, donc $X \cap F = Y \cap F$, avec $F \in I(E)$. Ceci prouve que $X\mathcal{R}Y$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons qu'il existe $F \in I(E)$ tel que $X \cap F = Y \cap F$.
Soit $x \in X\Delta Y$. Si $x \in F$, alors $x \in X \cap F$ ou bien $x \in Y \cap F$, donc $x \in X \cap Y$, ce qui est faux car $x \in X\Delta Y$. Ainsi, $X\Delta Y \subset \overline{F}$ ce qui prouve que $X\Delta Y$ est fini.

Exercice 4.13 :

Existence :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion selon laquelle l'entier n admet une écriture factorielle.
Pour $n = 0$, on prend $p = 0$, en convenant qu'une somme vide est nulle.
Ceci montre $R(0)$.
Pour $n \geq 0$, on suppose $R(k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrons $R(n + 1)$.
$\{m \in \mathbb{N}/m! \leq n + 1\}$ est non vide et majoré par $n + 1$, donc il admet un maximum noté p. Ainsi, $p! \leq n + 1 < (p + 1)!$.
Effectuons la division euclidienne de $n + 1$ par $p!$:
il existe $x_p, h \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1 = p!x_p + h$ avec $0 \leq h < p!$.
Alors $p!x_p \leq n + 1 < (p + 1)!$, donc $x_p \leq p$.

De plus $h < p! \leq n+1$, donc $h \leq n$. On peut donc utiliser $R(h)$: il existe $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_q \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$ et $x_q \neq 0$ (si $q \neq 0$) tels que $h = \sum_{k=1}^{q} k! x_k$.
$q! \leq q! x_q \leq h < p!$, donc $q < p$. Or $n+1 = h + p! x_p$, d'où $R(n+1)$.
On a donc montré l'existence.

Unicité :

Lemme :

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$, $\sum_{k=1}^{p} k! x_k \leq (p+1)! - 1$, avec égalité si et seulement si pour tout k, $x_k = k$.
Démonstration du lemme : $\sum_{k=1}^{p} k! x_k \leq \sum_{k=1}^{p} k! k = \sum_{k=1}^{p} k!(k+1-1) = \sum_{k=1}^{p} ((k+1)! - k!)$.
La dernière somme est télescopique, donc $\sum_{k=1}^{p} k! x_k \leq (p+1)! - 1$. De plus, s'il existe $k \in \mathbb{N}_p$ tel que $x_k < k$, alors cette inégalité est stricte. Réciproquement, lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, $x_k = k$, on a bien montré que $\sum_{k=1}^{p} k! x_k = \sum_{k=1}^{p} k!((k+1) - k) = (p+1)! - 1$.

Première méthode : Une démonstration directe :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n possède deux écritures factorielles :
$n = \sum_{k=1}^{p} x_k k! = \sum_{h=1}^{q} h! y_h$.

Si $q < p$, alors d'après le lemme, $n = \sum_{h=1}^{q} h! y_h < (q+1)! \leq p! \leq n$, ce qui est faux. On raisonne de même si $p < q$, donc $p = q$.
On peut écrire que $n = p! x_p + r$ avec $r = \sum_{k=1}^{p-1} x_k k!$. d'après le lemme, $0 \leq r < p!$, donc cette écriture est la division euclidienne de n par $p!$. Mais c'est aussi le cas de l'écriture $n = p! y_p + r'$ avec $r' = \sum_{k=1}^{p-1} y_k k!$, donc d'après l'unicité de la division euclidienne, $x_p = y_p$ et $\sum_{k=1}^{p-1} x_k k! = \sum_{k=1}^{p-1} y_k k!$. On conclut en inscrivant ce raisonnement dans une récurrence forte sur n.

Seconde méthode : Par un argument combinatoire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons
$A_n = \{(x_1, \ldots, x_p) / 1 \leq p < n, \forall k \in \{1, \ldots, p\},\ 0 \leq x_k \leq k, x_p \neq 0\}$
et
$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & A_n & \longrightarrow & [\![1, n!-1]\!] \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{p} k! x_k \end{array}.$$

φ_n est bien à valeurs dans $[\![1, n!-1]\!]$ d'après le lemme, elle est surjective d'après la démonstration de l'existence. L'unicité correspond à l'injectivité de φ_n, ce que l'on peut démontrer en prouvant que $\# A_n = \#[\![1, n!-1]\!] = n! - 1$.

Or $\# A_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} p!p = n! - 1$ d'après le cas d'égalié du lemme.