

DM 13 : un corrigé

Problème 1 : Éléments sup-irréductibles et parties sup-génératrices

Partie I : Éléments sup-irréductibles

1°) $\diamond$ Soit M un majorant de $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Soit $j \in I$: A_j est inclus dans $\bigcup_{i \in I} A_i$, donc M majore A_j , or $\sup(A_j)$ est le plus petit des majorants de A_j , donc $M \geq \sup(A_j)$. Ainsi M est un majorant de $\{\sup(A_i) / i \in I\}$. Réciproquement, soit M un majorant de $\{\sup(A_i) / i \in I\}$.

Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

On a alors : $x \leq \sup(A_i) \leq M$. Ainsi, M est bien un majorant de $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Les ensembles $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\{\sup(A_i) / i \in I\}$ ont donc les mêmes majorants.

$\diamond$ Supposons que $\bigcup_{i \in I} A_i$ possède une borne supérieure, notée s . Alors s est le minimum

de l'ensemble des majorants de $\bigcup_{i \in I} A_i$, donc d'après le point précédent, c'est le minimum

de l'ensemble des majorants de $\{\sup(A_i) / i \in I\}$. Ainsi, $\{\sup(A_i) / i \in I\}$ possède une borne supérieure égale à s . La réciproque est analogue, donc la question est prouvée.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $x = \sup(]-\infty, x])$: en effet, x majore $]-\infty, x[$ et si $y \in]-\infty, x[$ alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $y < z < x$, donc y ne majore pas $]-\infty, x[$. Ainsi, x est bien le plus petit des majorants de $]-\infty, x[$. Donc $x = \sup(]-\infty, x[)$, cependant $x \notin]-\infty, x[$, donc x n'est pas sup-irréductible. On a montré qu'aucun réel n'est sup-irréductible.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\diamond$ Supposons d'abord que $n = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \mid k$, donc $1 = \min(\mathbb{N})$.

Posons $X = \emptyset$. L'ensemble des majorants de X est $\mathbb{N}$, donc $1 = \sup(X)$, mais $1 \notin X$. Ceci prouve que 1 n'est pas sup-irréductible.

◇ Supposons que $n = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \mid 0$ car $0 = 0 \times k$, donc $0 = \max(\mathbb{N})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k+1$ divise k , alors il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $k = h(k+1)$. Nécessairement, $h \neq 0$, donc, pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, $k \geq k+1$, ce qui est faux. Ainsi, k n'est pas un majorant de $\mathbb{N}^*$. L'ensemble des majorants de $\mathbb{N}^*$ est donc égal à $\{0\}$. Alors $0 = \sup(\mathbb{N}^*)$ mais $0 \notin \mathbb{N}^*$, donc 0 n'est pas sup-irréductible.

◇ On peut maintenant supposer que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Supposons d'abord que n est une puissance d'un nombre premier : il existe $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p^k$.

Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle X possède un sup avec $n = \sup(X)$.

Soit $x \in X$. x divise $n = p^k$, donc il existe $h \in \{0, \dots, k\}$ tel que $x = p^h$.

Si $n \notin X$, alors $X \subset \{p^h \mid h \in \{0, \dots, k-1\}\}$ et p^{k-1} majore X . C'est faux car p^{k-1} divise p^k et $p^{k-1} \neq p^k$, donc n ne serait pas le plus petit majorant de X . Ainsi, $n \in X$, pour toute partie X telle que $n = \sup(X)$; n est sup-irréductible.

◇ Supposons enfin que n n'est pas une puissance d'un nombre premier. Sa décomposition primaire est alors de la forme $n = \prod_{1 \leq i \leq k} p_i^{v_i}$, où $k \geq 2$, $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et où $v_1, \dots, v_k$ sont des entiers non nuls.

Posons $a = p_1^{v_1}$ et $b = \prod_{2 \leq i \leq k} p_i^{v_i}$. Notons $X = \{a, b\}$.

Clairement, n majore X .

Soit c un majorant de X . Alors a et b divisent c , or a et b sont premiers entre eux, donc $n = ab$ divise c . n est donc le plus petit des majorants de X . Alors $n = \sup(X)$, mais $n \notin X$, donc n n'est pas sup-irréductible.

En conclusion, les sup-irréductibles de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité sont les puissances des nombres premiers, différentes de 1.

4°) Notons $A = \{a \in E \mid a < x\}$.

y est un élément maximal de A si et seulement si $y \in A$ et si, pour tout $z \in A$, $\neg(y < z)$, donc si et seulement si $y < x$ et si $\{z \in A \mid y < z\}$ est vide, c'est-à-dire si et seulement si $y \in E^-x$, ce qui conclut.

5°) Soit X une partie non vide de E .

Supposons que X ne possède aucun élément maximal.

X est non vide, donc il existe $x_0 \in X$.

x_0 n'est pas maximal dans X , donc il existe $x_1 \in X$ tel que $x_0 < x_1$.

Supposons construits $x_0, \dots, x_n \in X$ tels que $x_0 < \dots < x_n$, où $n \geq 1$.

x_n n'est pas maximal dans X , donc il existe $x_{n+1} \in X$ tel que $x_n < x_{n+1}$.

Par récurrence, on a ainsi construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$. Alors par transitivité de $\leq$, $x_p \leq x_q$. Si $x_p = x_q$, alors $x_p \leq x_{p+1} \leq x_q = x_p$, donc $x_p = x_{p+1}$ ce qui est faux. Ainsi, $x_p \neq x_q$. Ceci prouve que l'application $p \mapsto x_p$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans E . C'est impossible car E est un ensemble fini. Ainsi, X possède nécessairement au moins un élément maximal.

6°) Supposons que E^-x est non vide. Il existe $y \in E^-x$. Alors $y < x$, donc x n'est pas minimal dans E .

Réciproquement, supposons que x n'est pas minimal dans E .

Posons $X = \{a \in E / a < x\}$. Alors X est non vide, donc d'après la question précédente, X possède un élément maximal, puis d'après la question 4, $E^-x \neq \emptyset$.

7°) Soit $x \in E$. Soit $y, z \in E^-x$ avec $y \neq z$. Supposons que y et z sont comparables. Sans perte de généralité, on peut supposer que $y < z$. Alors $y < z < x$, donc $\{a \in E / y < a < x\}$ est non vide, ce qui est faux car $y \in E^-x$.

Ainsi, y et z ne sont pas comparables.

8°) $\diamond$ Par définition de E^-x , x est un majorant de E^-x , or s est le plus petit des majorants, donc $x \geq s$.

De plus, si $x = s = \sup(E^-x)$, x étant sup-irréductible, $x \in E^-x$, donc $x < x$, ce qui est faux. Ainsi, $s < x$.

$\diamond$ Soit $y \in E^-x$. s majore E^-x , donc $y \leq s$. Supposons que $y \neq s$. Alors $y < s < x$, donc $\{a \in E / y < a < x\}$ est non vide, ce qui est faux car $y \in E^-x$. Ainsi, $y = s$. Ceci montre que $E^-x \subset \{s\}$, or E^-x est non vide, donc E^-x est bien un singleton.

9°) Notons $K = \{a \in E / z \leq a < x\}$. $z \in K$, donc K est non vide. D'après la question 5, K possède au moins un élément maximal, que l'on notera b .

Soit $c \in E$ tel que $c < x$. Supposons que $c \geq b$. Ainsi, $z \leq b \leq c < x$, donc $c \in K$, or b est maximal dans K , donc $c = b$. Ceci prouve que b est maximal dans $\{a \in E / a < x\}$. D'après la question 4, $b \in E^-x$, donc $b = y$.

Ceci prouve que $y \in K$ donc $z \leq y$.

10°) $\diamond$ Notons M l'ensemble des majorants de E^-x . On sait que $x \in M$.

Supposons que x n'est pas minimal dans M . Alors il existe $y \in M$ tel que $y < x$.

Soit $z \in E^-x$. Alors $z \leq y < x$, or $\{a \in E / z < a < x\}$ est vide, donc $z = y$. Ainsi, $E^-x \subset \{y\}$, ce qui est faux car E^-x possède au moins deux éléments. On a montré que x est minimal dans M .

$\diamond$ Par hypothèse, E^-x ne possède pas de borne supérieure, donc x n'est pas le minimum de M .

Ainsi, il existe $y \in M$ tel que $\neg(x \leq y)$. Or $\neg(y < x)$ car x est minimal dans M , donc x et y ne sont pas comparables et y est un majorant de E^-x .

11°) $\bullet$ Supposons d'abord qu'aucune de ces trois conditions n'est vérifiée.

Si E possède un minimum avec $x = \min(E)$, alors $x = \sup(\emptyset)$ (en effet, l'ensemble des majorants de $\emptyset$ est E dont le minimum est x), mais $x \notin \emptyset$, donc x n'est pas sup-irréductible.

Sinon, d'après la question 6, E^-x possède au moins 2 éléments et il possède une borne supérieure. D'après la question 8, si x était sup-irréductible, E^-x serait un singleton. Ainsi, x n'est pas sup-irréductible.

$\bullet$ Réciproquement, vérifions que si l'une de ces 3 conditions est vérifiée, alors x est sup-irréductible.

$\diamond$ Supposons d'abord que x est minimal dans E sans être le minimum de E .

Soit $X \subset E$ telle que X possède un sup avec $x = \sup(X)$.

$X \neq \emptyset$ (sinon, $x = \sup(\emptyset) = \min(E)$ ce qui est faux), donc il existe $y \in X$. Alors $y \leq x$, mais x est minimal, donc $x = y \in X$. Ceci prouve que x est sup-irréductible.

◇ Supposons que E^-x est un singleton égal à $\{y\}$.

Soit $X \subset E$ telle que X possède un sup avec $x = \sup(X)$.

Supposons que $x \notin X$. Alors pour tout $z \in X$, $z < x$. Alors d'après la question 9, pour tout $z \in X$, $z \leq y$. Ainsi, y majore X , mais $y \in E^-x$, donc $y < x$. y est un majorant de X strictement inférieur à $x = \sup(X)$. C'est impossible, donc $x \in X$. Ainsi, x est sup-irréductible.

◇ On suppose enfin que E^-x possède au moins deux éléments et que E^-x ne possède pas de borne supérieure.

Soit $X \subset E$ telle que X possède un sup avec $x = \sup(X)$. Supposons que $x \notin X$.

D'après la question 10, il existe un majorant y de E^-x non comparable avec x .

Soit $z \in X$. Alors $z < x$. Posons $K = \{a \in E / z \leq a < x\}$. Le raisonnement de la question 9 montre à nouveau qu'il existe un élément maximal dans K noté b et que $b \in E^-x$. Or y majore E^-x , donc $y \geq b$, mais $b \in K$, donc $b \geq z$. Ainsi, $y \geq z$. Ceci prouve que y est un majorant de X . Or $x = \sup X$, donc $x \leq y$, ce qui est faux car x et y ne sont pas comparables. Ceci démontre que x est sup-irréductible.

Partie II : Parties sup-génératrices

12°) Soit $x \in E$. Posons

$K = \{k \in \mathbb{N}^* / \exists x_1, \dots, x_k \in E, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}, x_i < x_{i+1}, \text{ et } x_k = x\}$.

K est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $1 \in K$ (en prenant $x_1 = x$) et K est majorée par le cardinal de E , donc K possède un maximum. On pose $h(x) = \max(K)$.

13°) Par hypothèse, il existe $X \subset E$ tel que X possède un sup avec $x = \sup(X)$ et $x \notin X$. Soit $y \in X$. Posons $k = h(y)$. Alors il existe $y_1, \dots, y_k \in E$ tel que $y_1 < \dots < y_k = y$. D'après les hypothèses, on a $y_1 < \dots < y_k = y < x$, donc $h(x) \geq k + 1$. Ainsi, $h(x) > h(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

14°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x \in E$ tel que $h(x) = n$, il existe $X \subset S(E)$ tel que X possède un sup et $x = \sup(X)$.

Initialisation : Soit $x \in E$ tel que $h(x) = 1$. Alors x est minimal (sinon il existerait $x_2 \in E$ tel que $x_2 < x$, donc $h(x) \geq 2$).

Si E admet un minimum avec $x = \min(E)$, alors on a déjà vu que $x = \sup(\emptyset)$ et on a bien que $\emptyset \subset S(E)$. Sinon, d'après le premier cas de la question 11, x est sup-irréductible, donc $x \in S(E)$. On a alors $x = \sup(\{x\})$ et $\{x\} \subset S(E)$.

Ainsi, on a montré $R(1)$.

Hérédité : on suppose que $n \geq 2$ et que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $R(k)$ est vraie.

Soit $x \in E$ tel que $h(x) = n$.

Si x est sup-irréductible, alors on a encore $x = \sup(\{x\})$ et $\{x\} \subset S(E)$.

Supposons maintenant que x n'est pas sup-irréductible. D'après la question précédente, il existe $X \subset E$ tel que $x = \sup(X)$ et tel que, pour tout $y \in X$, $h(y) < h(x) = n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $y \in X$, il existe $X_y \subset S(E)$ tel que X_y possède une borne supérieure avec $y = \sup(X_y)$.

Ainsi, $X = \{\sup(X_y) / y \in X\}$. D'après la première question, $\bigcup_{y \in X} X_y$ possède une borne supérieure et $x = \sup\left(\bigcup_{y \in X} X_y\right)$, or pour tout $y \in X$, $X_y \subset S(E)$, donc $\bigcup_{y \in X} X_y \subset S(E)$.

Dans tous les cas, on a montré qu'il existe $A \subset S(E)$ tel que $x = \sup(A)$.

Ceci prouve $R(n)$.

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R(n)$ est vraie, donc $S(E)$ est sup-génératrice.

15°) Par définition de $S_x(E)$, x majore $S_x(E)$.

D'après la question précédente, il existe $X \subset S(E)$ tel que

X admet un sup et $x = \sup(X)$.

Pour tout $z \in X$, $z \leq x$, donc $X \subset S_x(E)$.

Soit y un majorant de $S_x(E)$. Alors y majore X , donc $y \geq x$.

Ainsi, x est le plus petit des majorants de $S_x(E)$, donc $S_x(E)$ possède un sup et $x = \sup(S_x(E))$.

16°) Soit G une partie sup-génératrice de E . Soit $x \in S(E)$. Il existe $X \subset G$ tel que X possède un sup avec $x = \sup(X)$. Mais x est sup-irréductible, donc $x \in X$. Ainsi, $x \in G$. On a bien montré que $S(E) \subset G$.

Réciproquement, Supposons que $S(E) \subset G$. Soit $x \in E$. On a vu que $x = \sup(S_x(E))$, or $S_x(E) \subset G$, donc G est sup-génératrice.

Problème 2 : Le postulat de Bertrand

Partie I : majoration du produit des premiers nombres premiers

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}, \text{ donc } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2°) Selon la formule du binôme de Newton,

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k},$$

$$\text{donc } 4^m \times 2 = 2^{2m+1} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1},$$

or $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{(2m+1)-m} = \binom{2m+1}{m+1}$, donc $4^m \times 2 \geq 2 \binom{2m+1}{m+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leq 2m+1$.

Alors p divise $\prod_{k=m+2}^{2m+1} k = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = m! \binom{2m+1}{m+1}$, or p est premier avec $m!$, donc

d'après le théorème de Gauss, p divise $\binom{2m+1}{m+1}$, pour tout $p \in \mathbb{P}$ tel que

$m+1 < p \leq 2m+1$, donc d'après le cours d'arithmétique, $\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ m+1 < p \leq 2m+1}} p$ divise le coefficient

binomial $\binom{2m+1}{m+1}$.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ la propriété $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p \leq 4^n$.

Pour $n = 1$, $\prod_{p \in \mathbb{P}_1} p = 1$, car c'est un produit vide, d'où $R(1)$.

Pour $n = 2$, $\prod_{p \in \mathbb{P}_2} p = 2 \leq 16 = 4^2$, donc $R(2)$ est vraie.

Supposons que $n \geq 2$ et que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $R(k)$ est vrai.

Si $n+1$ est pair, $n+1$ étant différent de 2, il n'est pas premier,

donc $\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p \leq 4^n \leq 4^{n+1}$.

Supposons maintenant que $n+1$ est impair. $n+1 \geq 3$, donc il existe $m \geq 1$ tel que

$$n+1 = 2m+1. \text{ Alors } \prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p = \left(\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [0, m+1]} p \right) \times \left(\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \right).$$

$m \geq 1$, donc $m+1 \leq 2m = n$.

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [0, m+1]} p \leq 4^{m+1}$.

De plus, d'après la question 3, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p = k \binom{2m+1}{m+1}$, or

$\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p$ et $\binom{2m+1}{m+1}$ sont dans $\mathbb{N}^*$, donc $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que

$\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \leq \binom{2m+1}{m+1}$, puis d'après la première question, que $\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \leq 4^m$.

Ainsi, en combinant ces différentes inégalités, on obtient $\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p \leq 4^{m+1} \times 4^m = 4^{n+1}$,

ce qui démontre $R(n+1)$.

Le principe de récurrence forte permet de conclure.

Partie II : une formule de Legendre

5°) Soit $k \in \mathbb{N}$. n et p sont strictement positifs et $p \geq 2$, donc $\ln(p) > 0$. Ainsi,

$n < p^k \iff \ln(n) < k \ln(p) \iff \frac{\ln n}{\ln p} < k \iff \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor < k$, donc si l'on pose

$m = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$, on a montré que $\{k \in \mathbb{N} / n < p^k\} = [m+1, +\infty[\cap \mathbb{N}$.

Ainsi, $\{k \in \mathbb{N} / n < p^k\}$ possède bien un minimum, il est égal à $\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + 1$.

6°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons U_k l'ensemble des entiers compris entre 1 et n qui sont multiples de p^k .

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{N}_n$. Alors $v_p(a) = k$ si et seulement si a est un multiple de p^k sans être un multiple de p^{k+1} , donc $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$. Or $U_{k+1} \subset U_k$, donc $|\Omega_k| = |U_k| - |U_{k+1}|$.

D'autre part, $U_k = \{bp^k / b \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq bp^k \leq n\}$ et, pour tout $b \in \mathbb{N}$,

$1 \leq bp^k \leq n \iff 1 \leq b \leq \frac{n}{p^k} \iff 1 \leq b \leq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$, donc $|U_k| = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

En conclusion, $|\Omega_k| = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$.

On remarquera que, d'après la question précédente, en posant $k_0 = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + 1$, pour tout $k \geq k_0$, Ω_k est vide.

7°) $\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

En effet, $ab = \left(\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{v_q(a)} \right) \times \left(\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{v_q(b)} \right)$, tous ces produits étant constitués d'un nombre

fini de facteurs différents de 1, donc $ab = \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{v_q(a) + v_q(b)}$ et on conclut en utilisant

l'unicité de la décomposition de ab en produit de nombres premiers.

$\diamond$ Or $n! = \prod_{1 \leq k \leq n} k$, donc $v_p(n!) = \sum_{k=1}^n v_p(k)$.

De plus la famille $(\Omega_h)_{0 \leq h \leq k_0-1}$ forme une partition de $\{1, \dots, n\}$,

$$\text{donc } v_p(n!) = \sum_{h=0}^{k_0-1} \sum_{k \in \Omega_h} v_p(k) = \sum_{h=0}^{k_0-1} h |\Omega_h|.$$

◇ D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - k \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - (k+1) \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) + \sum_{k=0}^{k_0-1} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \\ &= 0 - 0 + \sum_{k \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \quad (\text{par télescopage}) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \end{aligned}$$

Partie III : diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$

8°) p divise $(n!)a_n = (2n)(2n-1) \cdots (n+1)$, or p est premier, donc p divise l'un des facteurs $n+1, n+2, \dots, 2n$. Ceci implique que $p \leq 2n$.

De plus, on a supposé qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n+1$ et $2n$, donc $p \leq n$.

9°) Supposons que $p > \frac{2n}{3}$. Ainsi, $\frac{2n}{3} < p \leq n$.

Alors $n < \frac{4n}{3} < 2p \leq 2n$ et $2n < 3p$, donc les seuls multiples de p entre 1 et $2n$ sont p et $2p$, avec $2p > n$. On en déduit que $v_p((2n)!) = 2$ et $v_p(n!) = 1$.

Or $(2n)! = a_n(n!)^2$, donc $v_p((2n)!) = v_p(a_n) + 2v_p(n!)$. Ainsi $v_p(a_n) = 0$, ce qui est faux car p divise a_n . Ainsi, on a bien montré que $p \leq \frac{2n}{3}$.

10°) ◇ On vient de voir que $v_p(a_n) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!)$, or d'après la formule de

Legendre, pour tout $N \geq \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$, $v_p(n!) = \sum_{k=1}^N \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$,

$$\text{donc on a bien } v_p(a_n) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

◇ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

En effet, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et $2(x-1) < 2\lfloor x \rfloor \leq 2x$,

donc $(2x-1) - 2x < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2x - 2(x-1)$, puis $-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$, ce qui conclut car $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$.

◇ Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor\}$, $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \in \{0, 1\}$,

$$\text{donc } v_p(a_n) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} 1 = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor.$$

11°) $\diamond$ On suppose que $p > \sqrt{2n}$.

Alors $\frac{\ln(2n)}{\ln p} < \frac{\ln(2n)}{\frac{1}{2}\ln(2n)} = 2$, donc $v_p(a_n) \leq \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor \leq 1$.

$\diamond$ $v_p(a_n) \leq \frac{\ln(2n)}{\ln p}$, donc $p^{v_p(a_n)} = e^{v_p(a_n) \ln p} \leq e^{\ln(2n)} = 2n$.

Partie IV : démonstration du postulat de Bertrand

12°) D'après la question 9, $a_n = \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \frac{2n}{3}]} p^{v_p(a_n)}$, puis d'après la question précédente,

$$a_n \leq \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]} p^{v_p(a_n)} \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [\sqrt{2n}, \frac{2n}{3}]} p, \text{ or toujours d'après la question précédente,}$$

$$\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]} p^{v_p(a_n)} \leq \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]} (2n) \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}, \text{ car le cardinal de } \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}] \text{ est}$$

inférieur à $\sqrt{2n} - 1$.

De plus, d'après la question 4, $\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [\sqrt{2n}, \frac{2n}{3}]} p \leq \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [\frac{2n}{3}, 2n]} p \leq 4^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \leq 4^{\frac{2n}{3}}$.

On en déduit que $a_n \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$.

13°) Soit $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$.

$$\text{On calcule } \frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} \times \frac{k!(2n-k)!}{(2n)!} = \frac{2n-k}{k+1},$$

$$\text{donc } \binom{2n}{k+1} \geq \binom{2n}{k} \iff \frac{2n-k}{k+1} \geq 1 \iff 2n-k \geq k+1 \iff 2k \leq 2n-1.$$

Ainsi, $\binom{2n}{k+1} \geq \binom{2n}{k} \iff k \leq n-1$. Ceci démontre que la suite $\left(\binom{2n}{k} \right)_{0 \leq k \leq 2n}$ est croissante lorsque k varie de 0 à n , puis est décroissante lorsque k varie de n à $2n$. En particulier, cette suite atteint son maximum lorsque $k = n$,

$$\text{donc pour tout } k \in \{1, \dots, 2n\}, a_n \geq \binom{2n}{k}.$$

14°) D'après la formule du binôme de Newton,

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1)a_n,$$

d'après la question précédente. Or

$$a_n = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = 2 \frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{(n-1)!} = 2 \binom{2n-1}{n-1} \geq 2,$$

donc $2 - a_n \leq 0$ puis $4^n \leq 2na_n$, ce qui montre que $a_n \geq \frac{4^n}{2n}$.

15°) En combinant les questions 12 et 14, on obtient que $\frac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$, donc $4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$, puis en passant au logarithme, $\frac{n}{3} \ln 4 \leq \sqrt{2n} \ln(2n)$.

En divisant par $2n > 0$, on obtient $\frac{\ln(\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{2} \frac{\ln 4}{6} = \frac{\ln 2}{6}$.

16°) $\diamond \frac{\ln 2}{6} \geq \frac{\ln(32)}{32} \iff 32 \ln 2 \geq 6 \ln(2^5) \iff 32 \geq 6 \times 5$. La dernière propriété est vraie, donc $\frac{\ln 2}{6} \geq \frac{\ln(32)}{32}$.

$\diamond$ Pour tout $x \in]e, +\infty[$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est dérivable et, pour tout $x \in]e, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x} < 0$, donc f est strictement décroissante.

$\sqrt{2n} > e \iff n \geq \frac{e^2}{2} \iff n \geq 4$ (d'après l'énoncé). Or on a supposé qu'aucun nombre premier n'existe entre $n+1$ et $2n$, donc $n \notin \{1, 2, 3\}$. Ainsi, $n \geq 4$, donc $\sqrt{2n} \in]e, +\infty[$ et $32 \in]e, +\infty[$. Or $\frac{\ln(\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} \geq \frac{\ln(32)}{32}$ et f est strictement décroissante, donc $\sqrt{2n} \leq 32$.

On en déduit que $n \leq \frac{1}{2}(32)^2 = 512$.

$\diamond$ Il reste à vérifier à la main ou avec un ordinateur, que pour tout entier k compris entre 4 et 512, on peut toujours trouver un nombre premier entre $k+1$ et $2k$. C'est contraire à l'hypothèse portant sur n en début de partie III. On obtient une contradiction, donc il existe donc bien un nombre premier compris entre $n+1$ et $2n$.