# DS 3 : Un corrigé

#### Partie I: Définition d'un réel

- **1**°)  $\diamond a 1 < a < a + 1$ , donc  $a 1 \in \alpha$  et  $a + 1 \notin \alpha$ . Ainsi,  $\alpha$  est non vide et il est différent de  $\mathbb{Q}$ .
- $\diamond$  Soit  $x \in \alpha$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ . Alors  $x < a \le y$ , donc on a bien x < y.
- $\diamond$  Supposons que  $\alpha$  possède un maximum noté m dans  $\mathbb{Q}$ .  $m \in \alpha$ , donc m < a. Posons  $b = \frac{1}{2}(m+a) \in \mathbb{Q}$ . On sait alors que m < b < a, donc  $b \in \alpha$  et b > m, ce qui contredit la définition de m. Ainsi,  $\alpha$  ne possède pas de maximum dans  $\mathbb{Q}$ .
- **2**°) En réduisant au même dénominateur,  $b-a = \frac{a(a^2+6) a(3a^2+2)}{3a^2+2} = \frac{-2a^3+4a}{3a^2+2}$ ,

donc 
$$b-a=\frac{2a(2-a^2)}{3a^2+2}$$
. On calcule ensuite 
$$b^2-2=\frac{a^2(a^4+12a^2+36)-2(9a^4+12a^2+4)}{(3a^2+2)^2}=\frac{a^6-6a^4+12a^2-8}{(3a^2+2)^2},$$
 donc  $b^2-2=\frac{(a^2-2)^3}{(3a^2+2)^2}$ .

- **3°)**  $\diamond 2^2 = 4 > 2$ , donc  $2 \notin \alpha$ . Ceci prouve que  $\alpha \neq \mathbb{Q}$ .  $0 \in \alpha$ , donc  $\alpha \neq \emptyset$ .
- $\diamond$  Soit  $x \in \alpha$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ .

Alors  $y \notin \mathbb{Q}_-$ , donc y > 0. Ainsi, lorsque  $x \in \mathbb{Q}_-$ , on a bien x < y.

Supposons maintenant que x > 0. Alors  $x^2 < 2$  et  $y^2 \ge 2$ . Ainsi,  $x^2 < y^2$  avec x et y positifs strictement positifs. Alors  $0 < y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$  et y + x > 0, donc y - x > 0 puis x < y.

Ainsi, dans tous les cas, on a montré que x < y.

 $\diamond$  Supposons que  $\alpha$  possède dans  $\mathbb{Q}$  un maximum noté  $a.\ 1 \in \alpha$ , donc  $a > 0.\ a \in \alpha$ , donc  $a^2 < 2$ . Alors, avec les notations de la question précédente, on a  $b-a = \frac{2a(2-a^2)}{3a^2+2} > 0$ , donc a < b.

On a également  $b^2 - 2 = \frac{(a^2 - 2)^3}{(3a^2 + 2)^2} < 0$ , donc  $b^2 < 2$ . Or  $b \in \mathbb{Q}$ , donc  $b \in \alpha$  et a < b.

Ceci contredit la définition de a, donc  $\alpha$  ne possède pas de maximum dans  $\mathbb{Q}$ . On a bien montré que  $\alpha$  est un réel.

- **4°)** Raisonnons par l'absurde en supposant que  $\alpha$  est de type 1. Ainsi, il existe  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+ \ / \ x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < a\}.$   $0 \in \alpha$ , donc 0 < a.
- $\diamond$  Supposons que  $a^2 < 2$ . Alors  $a \in \alpha$ , donc a < a, ce qui est faux. En conséquence,  $a^2 \ge 2$ .
- $\diamond$  Supposons maintenant que  $a^2 > 2$ . Posons à nouveau  $b = \frac{a(a^2+6)}{3a^2+2}$ . Alors d'après la question 2, b-a < 0 et  $b^2-2 > 0$ . Alors b < a, donc  $b \in \alpha$  et  $b^2 > 2$  avec b > 0 donc  $b \notin \alpha$ , ce qui est impossible. En conséquence,  $a^2 \le 2$ .
- $\diamond$  Ainsi  $a^2=2$  et  $a\in\mathbb{Q}$ . Posons  $a=\frac{p}{q}$  avec  $p,q\in\mathbb{N}^*$  et  $p\wedge q=1$ . Alors  $p^2=2q^2$ , donc  $q|p^2$ , mais  $q\wedge(p^2)=1$ , donc d'après le lemme de Gauss, q|1, puis q=1. Alors  $p^2=2$ , donc  $1^2=1< p^2<4=2^2$ , donc 1< p<2 et  $p\in\mathbb{N}$ . C'est impossible. Ceci prouve que  $\alpha$  n'est pas de type 1.

### Partie II : Propriété de la borne supérieure

5°) Pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A \subset A$ , donc  $\subset$  est réflexive.

Soit  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $A \subset B$  et  $B \subset A$ . Alors, d'après l'axiome d'extensionnalité, A = B, ce qui prouve que  $\subset$  est antisymétrique.

Soit  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $A \subset B$  et  $B \subset C$ . Soit  $x \in A$ . Alors  $x \in B$ , puis  $x \in C$ , donc  $A \subset C$ . Ceci prouve que  $\subset$  est transitive.

En conclusion, on a bien montré que  $\subset$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{P}(E)$ .

**6°)** Soit  $\mathcal{A}$  une partie incluse dans  $\mathcal{P}(E)$ . Posons  $S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  et montrons que S est la

borne supérieure de A, c'est-à-dire le plus petit des majorants.

Clairement, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset S$ , donc S majore  $\mathcal{A}$ .

Soit  $B \in \mathcal{P}(E)$  un majorant de  $\mathcal{A}$ . Alors, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$ .

Soit  $x \in S$ . Il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $x \in A$ . Alors  $x \in B$ . Ceci prouve que  $S \subset B$ . Ainsi, S est bien le plus petit des majorants de  $\mathcal{A}$ , ce qui conclut.

**7°)** D'après la question 5, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur  $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ , donc par restriction, c'est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Supposons que  $\beta \not\subset \alpha$ . Il s'agit de montrer que  $\alpha \subset \beta$ .

Par hypothèse, il existe  $x_0 \in \beta$  tel que  $x_0 \notin \alpha$ .

Soit  $x \in \alpha$ . Supposons que  $x \notin \beta$ .

On a  $x \in \alpha$  et  $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ , or  $\alpha$  est un réel, donc  $x < x_0$ .

On a  $x_0 \in \beta$  et  $x \notin \beta$ , or  $\beta$  est un réel, donc  $x_0 < x$ .

C'est impossible, donc  $x \in \beta$ , pour tout  $x \in \alpha$ . On a montré que  $\alpha \subset \beta$ , ce qui conclut.

8°) Soit  $\mathcal{A}$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}$  est en particulier une partie incluse dans  $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ . Il est donc naturel de poser  $S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ; montrons que S est la

borne supérieure dans  $\mathbb{R}$  de  $\mathcal{A}$ .

♦ Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset S$  et, si B est un réel qui majore  $\mathcal{A}$ , alors pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$ , donc, ainsi qu'on l'a vu en question 6,  $S \subset B$ .

Pour conclure, il reste à montrer que S est un réel.

- $\diamond$   $\mathcal{A}$  est non vide, donc il existe  $\alpha \in \mathcal{A}$ .  $\alpha$  est un réel, donc  $\alpha$  est non vide, or  $\alpha \subset S$ , donc S est non vide.
- $\diamond$   $\mathcal{A}$  est majoré, donc il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\beta$  majore  $\mathcal{A}$ . Alors  $S \subset \beta$ . Or  $\beta$  est un réel, donc  $\beta \neq \mathbb{Q}$ . Ceci démontre que  $S \neq \mathbb{Q}$ .
- $\diamond$  Soit  $x \in S$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus S$ . Il existe  $\alpha \in A$  tel que  $x \in \alpha$ . Mais  $y \in \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{A \in A} A$ , donc

 $y \notin \alpha$ . Or  $\alpha$  est un réel, donc x < y.

 $\diamond$  Supposons que S possède un maximum noté m dans  $\mathbb{Q}$ .

Alors  $m \in S = \bigcup_{A \in A} A$ , donc il existe  $\alpha \in A$  tel que  $m \in \alpha$ .

 $\alpha$  est un réel, donc m n'est pas le maximum de  $\alpha$ . Ainsi, il existe  $x \in \alpha$  tel que m < x. Alors  $x \in S$  et m < x: c'est impossible par définition de m. Ainsi, S ne possède pas de maximum.

On en déduit que S est un réel, ce qu'il fallait démontrer.

 $9^{\circ}$ ) Soit B une partie de N.

Lorsque  $B \neq \emptyset$ , posons  $G' = \bigcap_{b \in B} b\mathbb{Z}$ . G' est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  en tant qu'intersection

de sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ , donc d'après le cours, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $G' = m\mathbb{Z}$ .

Soit  $b \in B$ .  $m \in G' \subset b\mathbb{Z}$ , donc  $b \mid m$ . Ainsi m est un majorant de B.

Soit m' un majorant de B. Pour tout  $b \in B$ ,  $b \mid m'$ , donc  $m' \in b\mathbb{Z}$ . Ainsi,  $m' \in G' = m\mathbb{Z}$ , donc  $m \mid m'$ . m est donc la borne supérieure de B.

Lorsque  $B = \emptyset$ , l'ensemble des majorants de B est  $\mathbb{N}$ , qui admet 1 comme minimum, car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \mid n$ , donc 1 est la borne supérieure de  $\emptyset$ .

Ainsi, dans tous les cas, B possède une borne supérieure. Ceci prouve que  $\mathbb N$  est un treillis complet.

10°) Soit A une partie de F.

Notons M l'ensemble des minorants de A.

M est une partie de F et  $(F, \leq)$  est un treillis complet, donc M possède une borne supérieure que l'on notera i. Il reste à montrer que  $i \in M$ . Alors, i sera le maximum de M, donc la borne inférieure de A.

Soit  $a \in A$ . Alors, pour tout  $m \in M$ ,  $m \le a$ . Ainsi, a est un majorant de M, donc par définition de la borne supérieure,  $i \le a$ . Ainsi, i est un minorant de A. On a bien prouvé que  $i \in M$ , ce qui conclut.

### Partie III : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ .

11°) Soit  $x \in \alpha + \beta$ . Il existe  $y \in \alpha$  et  $z \in \beta$  tels que x = y + z. L'addition dans  $\mathbb{Q}$  étant commutative, x = y + z, donc  $x \in \beta + \alpha$ . Ainsi,  $\alpha + \beta \subset \beta + \alpha$ . Par symétrie des rôles joués par  $\alpha$  et  $\beta$ , on a aussi l'autre inclusion, donc  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ .

12°) Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha \subset \beta$ .

Soit  $x \in \alpha + \gamma$ . Il existe  $y \in \alpha$  et  $z \in \gamma$  tels que x = y + z.

 $\alpha \subset \beta$ , donc  $y \in \beta$ , donc  $x = y + z \in \beta + \gamma$ .

Ainsi,  $\alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$ , ce qu'il fallait démontrer.

- 13°) Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $\diamond \quad \alpha$  et  $\beta$  sont non vides, donc il existe  $x \in \alpha$  et  $y \in \beta$ . Alors  $x + y \in \alpha + \beta$ , donc  $\alpha + \beta$  est non vide.
- $\diamond \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont différents de } \mathbb{Q}, \text{ donc il existe } x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha \text{ et } y \in \mathbb{Q} \setminus \beta.$

Supposons que  $x + y \in \alpha + \beta$ . Alors il existe  $x' \in \alpha$  et  $y' \in \beta$  tels que x + y = x' + y'.  $x' \in \alpha$  et  $x \notin \alpha$ , or  $\alpha$  est un réel, donc x' < x. De même, y' < y, donc en travaillant dans  $\mathbb{Q}$ , x + y = x' + y' < x + y, ce qui est faux. Ainsi,  $x + y \in \mathbb{Q} \setminus (\alpha + \beta)$ , ce qui prouve que  $\alpha + \beta$  est différent de  $\mathbb{Q}$ .

 $\diamond$  Soit  $x \in \alpha + \beta$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus (\alpha + \beta)$ .

Il existe  $z \in \alpha$  et  $t \in \beta$  tels que x = z + t.

Posons  $t' = y - z \in \mathbb{Q}$ , de sorte que y = z + t'.

Si  $t' \in \beta$ , alors  $y = z + t' \in \alpha + \beta$ , ce qui est faux, donc  $t' \notin \beta$ . Mais  $t \in \beta$  et  $\beta$  est un réel, donc t < t', puis x = z + t < z + t' = y.

 $\diamond$  Supposons que  $\alpha + \beta$  possède un maximum dans  $\mathbb{Q}$ , noté m.

Il existe  $x \in \alpha$  et  $y \in \beta$  tels que m = x + y.

 $\alpha$  est un réel, donc il ne possède aucun maximum. En particulier, il existe  $x' \in \alpha$  tel que x < x'. Alors m = x + y < x' + y, et  $x' + y \in \alpha + \beta$ : ceci contredit la définition de m, donc  $\alpha + \beta$  ne possède pas de maximum dans  $\mathbb{Q}$ .

En conclusion, on a montré que  $\alpha + \beta$  est bien un réel.

14°)  $0_{\mathbb{R}}$  doit correspondre au rationnel 0 *vu comme* un réel. Il est donc naturel de poser  $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ . C'est bien un réel d'après la première question.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit  $x \in \alpha + 0_{\mathbb{R}}$ . Il existe  $y \in \alpha$  et  $z \in 0_{\mathbb{R}}$  tels que x = y + z.

z < 0, donc x = y + z < y. Si  $x \notin \alpha$ ,  $\alpha$  étant un réel tel que  $y \in \alpha$ , alors y < x, ce qui est faux, donc  $x \in \alpha$ . Ceci démontre que  $\alpha + 0_{\mathbb{R}} \subset \alpha$ .

Réciproquement, supposons que  $x \in \alpha$ .  $\alpha$  est un réel, donc il ne possède pas de maximum. En particulier, il existe  $y \in \alpha$  tel que x < y. Ainsi x = y + z avec  $z \in \mathbb{Q}_{-}^{*}$ . Donc  $z \in \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$  puis  $x = y + z \in \alpha + \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ . Ceci démontre que  $\alpha + \mathbb{Q}_{\mathbb{R}} \supset \alpha$ .

Ainsi, on a montré que  $\alpha + 0_{\mathbb{R}} = \alpha$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 15°) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ .
- $\diamond \quad \alpha \text{ et } \mathbb{Q} \setminus \alpha \text{ sont non vides, donc il existe } x_0 \in \alpha \text{ et } y_0 \in \mathbb{Q} \setminus \alpha.$

Posons  $A = \{ n \in \mathbb{N} / x_0 + n\varepsilon \in \alpha \}.$ 

 $0 \in A$ , donc A est non vide.

 $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $x_0 + n\varepsilon \ge y_0 \iff n \ge \frac{y_0 - x_0}{\varepsilon}$ . Or il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\frac{y_0 - x_0}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}$ . Posons N = |n|. Alors  $N \ge \frac{|p|}{\varepsilon} \ge \frac{p}{\varepsilon}$  donc  $x_0 + N\varepsilon \ge y_0$ .

 $\frac{y_0 - x_0}{\varepsilon} = \frac{p}{q}. \text{ Posons } N = |p|. \text{ Alors } N \ge \frac{|p|}{q} \ge \frac{p}{q}, \text{ donc } x_0 + N\varepsilon \ge y_0.$ 

 $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \in A$ . Alors  $x_0 + n\varepsilon \in \alpha$ , or  $y_0 \notin \alpha$ , donc  $x_0 + n\varepsilon < y_0 \le x_0 + N\varepsilon$ . En travaillant dans  $\mathbb{Q}$ , on en déduit que  $n \le N$ , donc A est majoré.

 $\diamond$  A étant non vide et majoré, il possède un maximum noté m. Posons  $x=x_0+m\varepsilon$  et  $y=x_0+(m+1)\varepsilon$ . Par construction de  $m,\,x\in\alpha$  et  $y\notin\alpha$ . De plus,  $y=x+\varepsilon$ , ce qu'il fallait démontrer.

16°) Premier cas : On suppose que  $\alpha$  n'est pas du type 1.

Posons  $\beta = \{-x \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha\}$  et montrons déjà que  $\beta$  est un réel.

On utilisera que, pour tout  $y \in \mathbb{Q}$ ,  $y \in \beta \iff -y \notin \alpha$ .

- $\diamond \mathbb{Q} \setminus \alpha$  est non vide et différent de  $\mathbb{Q}$ , donc  $\beta$  est non vide et différent de  $\mathbb{Q}$ .
- $\diamond$  Soit  $x \in \beta$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus \beta$ .

Alors  $-x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$  et  $-y \in \alpha$ , or  $\alpha$  est un réel, donc -y < -x, puis en travaillant dans  $\mathbb{Q}$ , x < y.

 $\diamond$  Supposons que  $\beta$  possède un maximum dans  $\mathbb{Q}$ , noté m.

Alors  $-m \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ .

 $\alpha$  étant un réel, pour tout  $x \in \alpha$ , x < -m.

Réciproquement, supposons que  $x \in \mathbb{Q}$  avec x < -m. Alors -x > m, donc  $-x \notin \beta$ , donc  $x \in \alpha$ .

Ainsi, par double inclusion, on a montré que  $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -m\}$ , donc  $\alpha$  est du type 1, ce qui est faux. Ainsi,  $\beta$  ne possède pas de maximum.

On a donc bien montré que  $\beta$  est un réel.

Montrons maintenant que  $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$ .

- $\diamond$  Soit  $x \in \alpha + \beta$ . Il existe  $y \in \alpha$  et  $z \in \beta$  tels que x = y + z.
- $-z \notin \alpha$  et  $\alpha$  est un réel, donc y < -z. Ainsi, x = y + z < 0, donc  $x \in 0_{\mathbb{R}}$ .
- $\diamond$  Réciproquement, supposons que  $x \in 0_{\mathbb{R}}$ . Posons  $\varepsilon = -x \in \mathbb{Q}_{+}^{*}$ .

D'après la question précédente, il existe  $x \in \alpha$  et  $y \notin \alpha$  tel que  $y = x + \varepsilon$ .

Ainsi,  $x = -\varepsilon = x + (-y)$  avec  $x \in \alpha$  et  $-y \in \beta$ , donc  $x \in \alpha + \beta$ .

On a donc montré par double inclusion que  $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$ , ce qui conclut dans ce cas.

Second cas : On suppose que  $\alpha$  est du type 1.

Ainsi, il existe  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$ .

Posons alors  $\beta = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -a\}$ .  $\beta \in \mathbb{R}$  d'après la première question.

Montrons que  $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$ .

Soit  $x \in \alpha + \beta$ . Il existe  $y \in \alpha$  et  $z \in \beta$  tels que x = y + z,

donc x < a + (-a) = 0. Ainsi, x < 0.

Réciproquement, supposons que x < 0. Posons  $\varepsilon = -\frac{x}{2} \in \mathbb{Q}_+^*$ .

Alors  $a - \varepsilon \in \alpha$  et  $-a - \varepsilon \in \beta$ , donc  $x = -2\varepsilon = (a - \varepsilon) + (-a - \varepsilon) \in \alpha + \beta$ .

Ainsi, par double inclusion, on a montré que  $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$ , ce qui conclut.

## Partie IV: Produit de deux réels.

17°)  $\diamond$  Montrons que 1)  $\Longrightarrow$  2).

Supposons que  $\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ . Alors  $\mathbb{Q}_{-}^{*} \subset \alpha$  et  $\mathbb{Q}_{-}^{*} \neq \alpha$ .

Il existe donc  $x \in \alpha$  tel que  $x \geq 0$ .

 $\alpha$  est un réel, donc si  $0 \notin \alpha$ , alors x < 0, ce qui est faux, donc  $0 \in \alpha$ , ce qu'il fallait démontrer.

 $\diamond$  Montrons que 2)  $\Longrightarrow$  3); Supposons que  $0 \in \alpha$ .

 $\alpha$  étant un réel, il n'admet pas de maximum, donc il existe  $x \in \alpha$  tel que x > 0. Ainsi,  $\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$  est non vide.

 $\diamond \quad \text{Montrons que 3)} \Longrightarrow 1)\,;\, \text{Supposons que } \alpha \cap \mathbb{Q}_+^* \text{ est non vide}.$ 

Il existe  $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$ .

Soit  $x \in \mathbb{Q}_{-}^*$ . Si  $x \notin \alpha$ ,  $\alpha$  étant un réel contenant y, y < x ce qui est faux. Ainsi  $x \in \alpha$ , donc  $\mathbb{Q}_{-}^* \subset \alpha$ , c'est-à-dire  $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} \alpha$ . De plus  $0_{\mathbb{R}} \neq \alpha$  car  $y \in \alpha$  et  $y \notin 0_{\mathbb{R}}$ . Ainsi,  $\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ .

18°) On adapte la démonstration de la question 13.

 $\diamond$  Par construction,  $\mathbb{Q}_{-} \subset \alpha\beta$ , donc  $\alpha\beta$  est non vide.

 $\diamond$  Il existe  $x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus \beta$ . D'après la question précédente,  $\mathbb{Q}_-$  est inclus dans  $\alpha$  et dans  $\beta$ , donc  $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ .

Supposons que  $xy \in \alpha\beta$ .

xy > 0, donc il existe  $x' \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$  et  $y' \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*$  tels que xy = x'y'.

 $x' \in \alpha$  et  $x \notin \alpha$ , donc x < x'. De même, y < y'. Or x et y sont strictement positifs, donc en travaillant dans  $\mathbb{Q}$ , xy < x'y' = xy, ce qui est faux. Ainsi  $xy \notin \alpha\beta$ , ce qui prouve que  $\alpha\beta$  est différent de  $\mathbb{Q}$ .

 $\diamond$  Soit  $x \in \alpha\beta$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha\beta$ .  $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\beta$ , donc y > 0.

Si  $x \le 0$ , alors x < y. On peut donc supposer que x > 0.

Alors il existe  $y' \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$  et  $z' \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*$  tels que x = y'z'.

Posons  $z'' = \frac{y}{y'}$ , de sorte que y = y'z''.

 $y \notin \alpha\beta$ , donc  $z'' \notin \beta$  (sinon,  $z'' \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*$ , donc  $y = y'z'' \in \alpha\beta$ ). Or  $z' \in \beta$  et  $\beta$  est un réel, donc z' < z''. De plus, y' > 0, donc x = y'z' < y'z'' = y, ce qu'il fallait démontrer.

 $\diamond$  Supposons que  $\alpha\beta$  possède un maximum noté m. D'après la question précédente, il existe  $x' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$  et  $y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$ , donc  $x'y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha\beta$ . Ainsi, m > 0.

Il existe donc  $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$  et  $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$  tels que m = xy.

 $\alpha$  ne possède pas de maximum, donc il existe x' > x tel que  $x' \in \alpha$ . Alors  $x'y \in \alpha\beta$  et x'y > xy = m ce qui est impossible. Ainsi,  $\alpha\beta$  ne possède pas de maximum.

En conclusion, on a bien montré que  $\alpha\beta$  est un réel.

 $\diamond$  Par construction,  $\mathbb{Q}_{-} \subset \alpha\beta$ , donc  $0 \in \alpha\beta$ , donc d'après la question précédente,  $\alpha\beta \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ .

19°)  $\diamond$  On suppose d'abord que  $\alpha$  n'est pas de type 1.

Alors on a vu que  $-\alpha = \{-x \mid x \notin \alpha\}$ .

Par hypothèse,  $\alpha <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ , donc  $\alpha \subset 0_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}_{-}^{*}$ . En particulier,  $0 \notin \alpha$ ,

donc  $0 = -0 \in (-\alpha)$ . D'après la question  $17, -\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ .

 $\diamond$  Supposons maintenant que  $\alpha$  est de type 1.

Il existe  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$ .

On a vu que dans ce cas,  $-\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -a\}$ .

On a encore  $\alpha \subset 0_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}_{-}^*$ , donc  $a \leq 0$ . Ainsi  $-a \geq 0$  et  $0 \in (-\alpha)$ .

On a donc à nouveau  $-\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ .

**20°)** Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après la question 18,  $\alpha\beta$  et  $\beta\gamma$  sont dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc d'après la définition 3,  $\mathbb{Q}_{-} \subset (\alpha\beta)\gamma$  et  $\mathbb{Q}_{-} \subset \alpha(\beta\gamma)$ .

Il reste donc à montrer que  $\mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)\gamma = \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha(\beta\gamma)$ .

Soit  $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)\gamma$ . Alors il existe  $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)$  et  $z \in \mathbb{Q}_+^* \cap \gamma$  tels que x = yz. Toujours d'après la définition 3, il existe  $r \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$  et  $s \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$  tels que y = rs. Ainsi, d'après l'associativité de la multiplication dans  $\mathbb{Q}$ , x=(rs)z=r(sz). Or  $sz\in\beta\gamma$ , donc  $x \in \alpha(\beta\gamma) \cap \mathbb{Q}_+^*$ . Ceci démontre que  $\mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)\gamma \subset \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha(\beta\gamma)$ .

L'inclusion réciproque se démontre de la même façon.

#### **21**°) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ .

 $\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}_+^*$ , donc d'après la question 17,  $0 \in \beta$ . De même,  $0 \in \gamma$ . Alors  $0 = 0 + 0 \in \beta + \gamma$ , donc  $\beta + \gamma \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ . Alors, d'après la définition 3,  $\mathbb{Q}_{-} \subset \alpha(\beta + \gamma)$ .

De même,  $\alpha\beta$  et  $\alpha\gamma$  sont strictement positifs, donc  $0 \in (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ , or  $(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$  est un réel, donc  $\mathbb{Q}_{-} \subset (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ .

Ainsi, il reste à démontrer que  $\mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)] = \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)].$ 

 $\diamond$  Soit  $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)]$ . Il existe  $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$  et  $y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\beta + \gamma)$  tels que x = yy'. Il existe  $t \in \beta$  et  $z \in \gamma$  tels que y' = t + z.

Si  $t, z \in \mathbb{Q}_+^*$ , alors par distributivité dans  $\mathbb{Q}$  de la multiplication par rapport à l'addition,  $x = y(t+z) = (yt) + (yz) \in [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)].$ 

Si  $t \le 0$ ,  $y' \le z$ , or y > 0, donc  $x = yy' \le yz$ , or y > 0, z > 0,  $y \in \alpha$  et  $z \in \gamma$ , donc  $yz \in \alpha\gamma$ , mais  $\alpha\gamma$  est un réel, donc  $x \in \alpha\gamma$ , or  $0 \in \alpha\beta$ , donc  $x \in (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ . On conclut de même si  $z \leq 0$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $x \in (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ ,

donc on a montré que  $\mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)] \subset \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)].$ 

 $\diamond$  Réciproquement, soit  $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)].$ 

Il existe  $b \in \alpha\beta$  et  $g \in \alpha\gamma$  tels que x = b + g.

Si  $b \leq 0$ , g = x - b > 0, donc g = x'y' avec  $x' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$  et  $y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \gamma$ .

Posons  $z = \frac{x}{x'}$ , de sorte que x = x'z.

Alors  $x'z = x \le g = x'y'$ , or x' > 0, donc  $z \le y' \in \gamma$ . Or  $\gamma$  est un réel, donc  $z \in \gamma$ , puis  $z = 0 + z \in \beta + \gamma$ , or z > 0, donc  $x = x'z \in [\alpha(\beta + \gamma)]$ .

On conclut de la même façon lorsque  $g \leq 0$ .

Il reste à étudier le cas où  $b, g \in \mathbb{Q}_+^*$ . Dans ce cas,  $b \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)$  et  $g \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\gamma)$ , donc il existe  $a, a' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha, b' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$  et  $g' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \gamma$  tels que b = ab' et g = a'g'.

Posons  $a'' = \max(a, a') \in \mathbb{Q}_+^*$  et  $u = \frac{x}{a''}$ , de sorte que x = a''u. Alors  $a''u = x = (ab') + (a'g') \le a''(b' + g')$ , or a'' > 0, donc  $u \le b' + g' \in (\beta + \gamma)$ , mais  $\beta + \gamma$  est un réel, donc  $u \in (\beta + \gamma)$ . De plus u > 0, donc  $x = a''u \in [\alpha(\beta + \gamma)]$ .

Ainsi, dans tous les cas, on a montré que  $x \in [\alpha(\beta + \gamma)]$ ,

ce qui montre que  $\mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)] \supset \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)]$ .

22°)  $\diamond$  Posons  $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} / x < 1\}$ . D'après la première question,  $1_{\mathbb{R}}$  est un réel. De plus,  $0 \in 1_{\mathbb{R}}$ , donc  $1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$ , alors d'après la définition 4,  $1_{\mathbb{R}}\alpha = 0_{\mathbb{R}} = \alpha$ .

Supposons maintenant que  $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$ .

 $\diamond$  Supposons d'abord que  $\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ .

Soit  $x \in 1_{\mathbb{R}} \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ . Alors il existe  $y \in 1_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}_+^*$  et  $z \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$  tels que x = yz. On a 0 < y < 1, donc  $x < z \in \alpha$ . Or  $\alpha$  est un réel, donc  $x \in \alpha$ .

Réciproquement, soit  $x \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ .  $\alpha$  n'admet aucun maximum, donc il existe  $y \in \alpha$  tel que x < y. Alors x = zy où  $z \in 1_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}_+^*$ , donc  $x \in 1_{\mathbb{R}} \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ .

On a ainsi montré que  $\alpha \cap \mathbb{Q}_+^* = 1_{\mathbb{R}}\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ , or  $\alpha$  et  $1_{\mathbb{R}}\alpha$  sont dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc ils contiennent tous les deux  $\mathbb{Q}_-$ . Ainsi,  $1_{\mathbb{R}}\alpha = \alpha$ .

♦ Supposons maintenant que  $\alpha \notin \mathbb{R}_+^*$ . La relation d'ordre  $\leq_{\mathbb{R}}$  étant totale d'après la question 7,  $\alpha \leq_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ , or  $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$ , donc  $\alpha <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ . Alors d'après la question 19,  $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Ainsi, d'après le cas précédent,  $1_{\mathbb{R}}(-\alpha) = -\alpha$ . Alors d'après la définition 4,  $1_{\mathbb{R}}\alpha = -(1_{\mathbb{R}}(-\alpha)) = -(-\alpha)$ . Or  $-(-\alpha) = -(-\alpha) + 0_{\mathbb{R}} = -(-\alpha) + \alpha + (-\alpha)$ , donc par commutativité et associativité de l'addition dans  $\mathbb{R}$ ,  $-(-\alpha) = -(-\alpha) + (-\alpha) + \alpha = \alpha$ . Ainsi, on a montré que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $1_{\mathbb{R}}\alpha = \alpha$ .

**23**°) Pour tout  $a \in \mathbb{Q}$ , posons  $f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$ . D'après la première question, f est une application de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

D'après les questions 14 et 22,  $f(0) = 0_{\mathbb{R}}$  et  $f(1) = 1_{\mathbb{R}}$ .

 $\diamond$  Soit  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Soit  $x \in f(a) + f(b)$ . Il exite  $y \in f(a)$  et  $z \in f(b)$  tels que x = y + z. Alors x < a + b, donc  $x \in f(a + b)$ .

Réciproquement, supposons que  $x \in f(a+b)$ . Ainsi, x < a+b.

Posons  $\varepsilon = a + b - x \in \mathbb{Q}_+^*$ . Alors  $x = a + b - \varepsilon = (a - \frac{\varepsilon}{2}) + (b - \frac{\varepsilon}{2}) \in f(a) + f(b)$ .

Ainsi, pour tout  $a, b \in \mathbb{Q}$ , f(a+b) = f(a) + f(b).

- $\diamond$  Soit  $a \in \mathbb{Q}$ . Alors  $f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0) = 0_{\mathbb{R}}$ , donc f(-a) = -f(a).
- $\diamond$  Soit  $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ . Alors  $0 \in f(a)$  et  $0 \in f(b)$ , donc  $f(a), f(b) \in \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $x \in f(a)f(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$ . Alors x = yz, où  $y \in f(a) \cap \mathbb{Q}_+^*$  et  $z \in f(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$ . On a donc 0 < y < a et 0 < z < b, donc x = yz < ab. Ainsi  $x \in f(ab)$ .

Ceci démontre que  $f(a)f(b) \cap \mathbb{Q}_+^* \subset f(ab) \cap \mathbb{Q}_+^*$ .

Réciproquement, soit  $x \in f(ab) \cap \mathbb{Q}_+^*$ . Ainsi, 0 < x < ab.

Il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $p > \frac{b}{ab-x}$ . Alors  $ab - x > \frac{b}{p}$ .

On en déduit que  $ab > x + \frac{b}{p} > \frac{b}{p}$ , donc  $a > \frac{1}{p}$ .

Posons  $y = \frac{x}{a - \frac{1}{p}} \in \mathbb{Q}_+^*$ , de sorte que  $x = (a - \frac{1}{p})y$ .

On a  $(a - \frac{1}{p})y = x < ab - \frac{b}{p} = b(a - \frac{1}{p})$ , et  $a - \frac{1}{p} > 0$ , donc y < b. Ainsi,  $x = (a - \frac{1}{p})y$  avec  $0 < a - \frac{1}{p} < a$  et 0 < y < b, donc  $x \in f(a)f(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$ .

On en déduit que f(ab) = f(a)f(b) pour tout  $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ .

Cette égalité reste évidemment vraie si a = 0 ou b = 0.

Si  $a \in \mathbb{Q}_{-}^*$  et  $b \in \mathbb{Q}_{+}^*$ , f(ab) = f(-(-a)b) = -f((-a)b) = -f(-a)f(b) = f(a)f(b).

On procède de même dans les autres cas, donc pour tout  $a, b \in \mathbb{Q}$ , f(ab) = f(a)f(b).

 $\diamond$  Soit  $a, b \in \mathbb{Q}$  tels que a < b. Alors  $f(a) \subset f(b)$  et  $f(a) \neq f(b)$ , donc f est une application strictement croissante. On en déduit facilement qu'elle est injective.

En conclusion,  $f|_{\mathbb{Q}}^{f(\mathbb{Q})}$  est une bijection de  $\mathbb{Q}$  dans une partie de  $\mathbb{R}$ , qui transporte 0, 1, l'addition, la multiplication et l'ordre usuel de  $\mathbb{Q}$ . On peut donc identifier  $\mathbb{Q}$  avec  $f(\mathbb{Q})$  qui est une partie de  $\mathbb{R}$ . Ceci achève la construction de  $\mathbb{R}$  selon les coupures de

Dedekind :  $\mathbb R$  est bien un sur-corps de  $\mathbb Q$ , totalement ordonné et vérifiant la propriété de la borne supérieure.