DS 3 : Un corrigé

Barème

Le barème comporte 66 points dont voici la répartition :
- Partie I (11 points) : 2,2,3,4.
- Partie II (13 points) : 1,2,2,3,3,2.
- Partie III (17 points) : 1,1,4,2,3,6.
- Partie IV (25 points) : 2,4,2,2,6,3,6.

Partie I : Définition d'un réel

1°) $\diamond$ $a-1<a<a+1$, donc $a-1\in\alpha$ et $a+1\notin\alpha$. Ainsi, α est non vide et il est différent de $\mathbb{Q}$.
$\diamond$ Soit $x\in\alpha$ et $y\in\mathbb{Q}\setminus\alpha$. Alors $x<a\leq y$, donc on a bien $x<y$.
$\diamond$ Supposons que α possède un maximum noté m dans $\mathbb{Q}$. $m\in\alpha$, donc $m<a$. Posons $b=\frac{1}{2}(m+a)\in\mathbb{Q}$. On sait alors que $m<b<a$, donc $b\in\alpha$ et $b>m$, ce qui contredit la définition de m. Ainsi, α ne possède pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.

2°) En réduisant au même dénominateur, $b-a=\dfrac{a(a^2+6)-a(3a^2+2)}{3a^2+2}=\dfrac{-2a^3+4a}{3a^2+2}$,
donc $\boxed{b-a=\dfrac{2a(2-a^2)}{3a^2+2}}$. On calcule ensuite
$b^2-2=\dfrac{a^2(a^4+12a^2+36)-2(9a^4+12a^2+4)}{(3a^2+2)^2}=\dfrac{a^6-6a^4+12a^2-8}{(3a^2+2)^2}$,
donc $\boxed{b^2-2=\dfrac{(a^2-2)^3}{(3a^2+2)^2}}$.

3°) $\diamond$ $2^2=4>2$, donc $2\notin\alpha$. Ceci prouve que $\alpha\neq\mathbb{Q}$.
$0\in\alpha$, donc $\alpha\neq\emptyset$.
$\diamond$ Soit $x\in\alpha$ et $y\in\mathbb{Q}\setminus\alpha$.
Alors $y\notin\mathbb{Q}_-$, donc $y>0$. Ainsi, lorsque $x\in\mathbb{Q}_-$, on a bien $x<y$.
Supposons maintenant que $x>0$. Alors $x^2<2$ et $y^2\geq 2$. Ainsi, $x^2<y^2$ avec x et y positifs strictement positifs. Alors $0<y^2-x^2=(y-x)(y+x)$ et $y+x>0$, donc $y-x>0$ puis $x<y$.
Ainsi, dans tous les cas, on a montré que $x<y$.

$\diamond$ Supposons que α possède dans $\mathbb{Q}$ un maximum noté a. $1 \in \alpha$, donc $a > 0$. $a \in \alpha$, donc $a^2 < 2$. Alors, avec les notations de la question précédente, on a $b - a = \dfrac{2a(2 - a^2)}{3a^2 + 2} > 0$, donc $a < b$.
On a également $b^2 - 2 = \dfrac{(a^2 - 2)^3}{(3a^2 + 2)^2} < 0$, donc $b^2 < 2$. Or $b \in \mathbb{Q}$, donc $b \in \alpha$ et $a < b$.
Ceci contredit la définition de a, donc α ne possède pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.
On a bien montré que α est un réel.

4°) Raisonnons par l'absurde en supposant que α est de type 1. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+ \ / \ x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < a\}$.
$0 \in \alpha$, donc $0 < a$.
$\diamond$ Supposons que $a^2 < 2$. Alors $a \in \alpha$, donc $a < a$, ce qui est faux.
En conséquence, $a^2 \geq 2$.
$\diamond$ Supposons maintenant que $a^2 > 2$. Posons à nouveau $b = \dfrac{a(a^2 + 6)}{3a^2 + 2}$. Alors d'après la question 2, $b - a < 0$ et $b^2 - 2 > 0$. Alors $b < a$, donc $b \in \alpha$ et $b^2 > 2$ avec $b > 0$ donc $b \notin \alpha$, ce qui est impossible. En conséquence, $a^2 \leq 2$.
$\diamond$ Ainsi $a^2 = 2$ et $a \in \mathbb{Q}$. Posons $a = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Alors $p^2 = 2q^2$, donc $q | p^2$, mais $q \wedge (p^2) = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, $q | 1$, puis $q = 1$. Alors $p^2 = 2$, donc $1^2 = 1 < p^2 < 4 = 2^2$, donc $1 < p < 2$ et $p \in \mathbb{N}$. C'est impossible.
Ceci prouve que α n'est pas de type 1.

Partie II : Propriété de la borne supérieure

5°) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A$, donc $\subset$ est réflexive.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset A$. Alors, d'après l'axiome d'extensionnalité, $A = B$, ce qui prouve que $\subset$ est antisymétrique.
Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$, puis $x \in C$, donc $A \subset C$. Ceci prouve que $\subset$ est transitive.
En conclusion, on a bien montré que $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

6°) Soit $\mathcal{A}$ une partie incluse dans $\mathcal{P}(E)$. Posons $S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ et montrons que S est la borne supérieure de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire le plus petit des majorants.
Clairement, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A \subset S$, donc S majore $\mathcal{A}$.
Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ un majorant de $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.
Soit $x \in S$. Il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A$. Alors $x \in B$. Ceci prouve que $S \subset B$. Ainsi, S est bien le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$, ce qui conclut.

7°) D'après la question 5, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, donc par restriction, c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
Soit α et β deux réels. Supposons que $\beta \not\subset \alpha$. Il s'agit de montrer que $\alpha \subset \beta$.
Par hypothèse, il existe $x_0 \in \beta$ tel que $x_0 \notin \alpha$.
Soit $x \in \alpha$. Supposons que $x \notin \beta$.

On a $x \in \alpha$ et $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, or α est un réel, donc $x < x_0$.
On a $x_0 \in \beta$ et $x \notin \beta$, or β est un réel, donc $x_0 < x$.
C'est impossible, donc $x \in \beta$, pour tout $x \in \alpha$. On a montré que $\alpha \subset \beta$, ce qui conclut.

8°) Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ est en particulier une partie incluse dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Il est donc naturel de poser $S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$; montrons que S est la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ de $\mathcal{A}$.
$\diamond$ Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A \subset S$ et, si B est un réel qui majore $\mathcal{A}$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, donc, ainsi qu'on l'a vu en question 6, $S \subset B$.
Pour conclure, il reste à montrer que S est un réel.
$\diamond$ $\mathcal{A}$ est non vide, donc il existe $\alpha \in \mathcal{A}$. α est un réel, donc α est non vide, or $\alpha \subset S$, donc S est non vide.
$\diamond$ $\mathcal{A}$ est majoré, donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que β majore $\mathcal{A}$. Alors $S \subset \beta$. Or β est un réel, donc $\beta \neq \mathbb{Q}$. Ceci démontre que $S \neq \mathbb{Q}$.
$\diamond$ Soit $x \in S$ et $y \in \mathbb{Q} \setminus S$. Il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $x \in \alpha$. Mais $y \in \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, donc $y \notin \alpha$. Or α est un réel, donc $x < y$.
$\diamond$ Supposons que S possède un maximum noté m dans $\mathbb{Q}$.
Alors $m \in S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, donc il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $m \in \alpha$.
α est un réel, donc m n'est pas le maximum de α. Ainsi, il existe $x \in \alpha$ tel que $m < x$. Alors $x \in S$ et $m < x$: c'est impossible par définition de m. Ainsi, S ne possède pas de maximum.
On en déduit que S est un réel, ce qu'il fallait démontrer.

9°) Soit B une partie de $\mathbb{N}$.
Lorsque $B \neq \emptyset$, posons $G' = \bigcap_{b \in B} b\mathbb{Z}$. G' est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ en tant qu'intersection de sous-groupes de $\mathbb{Z}$, donc d'après le cours, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $G' = m\mathbb{Z}$.
Soit $b \in B$. $m \in G' \subset b\mathbb{Z}$, donc $b \mid m$. Ainsi m est un majorant de B.
Soit m' un majorant de B. Pour tout $b \in B$, $b \mid m'$, donc $m' \in b\mathbb{Z}$. Ainsi, $m' \in G' = m\mathbb{Z}$, donc $m \mid m'$. m est donc la borne supérieure de B.
Lorsque $B = \emptyset$, l'ensemble des majorants de B est $\mathbb{N}$, qui admet 1 comme minimum, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \mid n$, donc 1 est la borne supérieure de $\emptyset$.
Ainsi, dans tous les cas, B possède une borne supérieure. Ceci prouve que $\mathbb{N}$ est un treillis complet.

10°) Soit A une partie de F.
Notons M l'ensemble des minorants de A.
M est une partie de F et $(F, \leq)$ est un treillis complet, donc M possède une borne supérieure que l'on notera i. Il reste à montrer que $i \in M$. Alors, i sera le maximum de M, donc la borne inférieure de A.
Soit $a \in A$. Alors, pour tout $m \in M$, $m \leq a$. Ainsi, a est un majorant de M, donc par définition de la borne supérieure, $i \leq a$. Ainsi, i est un minorant de A. On a bien prouvé que $i \in M$, ce qui conclut.

Partie III : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

11°) Soit $x \in \alpha + \beta$. Il existe $y \in \alpha$ et $z \in \beta$ tels que $x = y + z$. L'addition dans $\mathbb{Q}$ étant commutative, $x = y + z$, donc $x \in \beta + \alpha$. Ainsi, $\alpha + \beta \subset \beta + \alpha$. Par symétrie des rôles joués par α et β, on a aussi l'autre inclusion, donc $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

12°) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \subset \beta$.
Soit $x \in \alpha + \gamma$. Il existe $y \in \alpha$ et $z \in \gamma$ tels que $x = y + z$.
$\alpha \subset \beta$, donc $y \in \beta$, donc $x = y + z \in \beta + \gamma$.
Ainsi, $\alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$\diamond$ α et β sont non vides, donc il existe $x \in \alpha$ et $y \in \beta$. Alors $x + y \in \alpha + \beta$, donc $\alpha + \beta$ est non vide.
$\diamond$ α et β sont différents de $\mathbb{Q}$, donc il existe $x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ et $y \in \mathbb{Q} \setminus \beta$.
Supposons que $x + y \in \alpha + \beta$. Alors il existe $x' \in \alpha$ et $y' \in \beta$ tels que $x + y = x' + y'$. $x' \in \alpha$ et $x \notin \alpha$, or α est un réel, donc $x' < x$. De même, $y' < y$, donc en travaillant dans $\mathbb{Q}$, $x + y = x' + y' < x + y$, ce qui est faux. Ainsi, $x + y \in \mathbb{Q} \setminus (\alpha + \beta)$, ce qui prouve que $\alpha + \beta$ est différent de $\mathbb{Q}$.
$\diamond$ Soit $x \in \alpha + \beta$ et $y \in \mathbb{Q} \setminus (\alpha + \beta)$.
Il existe $z \in \alpha$ et $t \in \beta$ tels que $x = z + t$.
Posons $t' = y - z \in \mathbb{Q}$, de sorte que $y = z + t'$.
Si $t' \in \beta$, alors $y = z + t' \in \alpha + \beta$, ce qui est faux, donc $t' \notin \beta$. Mais $t \in \beta$ et β est un réel, donc $t < t'$, puis $x = z + t < z + t' = y$.
$\diamond$ Supposons que $\alpha + \beta$ possède un maximum dans $\mathbb{Q}$, noté m.
Il existe $x \in \alpha$ et $y \in \beta$ tels que $m = x + y$.
α est un réel, donc il ne possède aucun maximum. En particulier, il existe $x' \in \alpha$ tel que $x < x'$. Alors $m = x + y < x' + y$, et $x' + y \in \alpha + \beta$: ceci contredit la définition de m, donc $\alpha + \beta$ ne possède pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.

En conclusion, on a montré que $\alpha + \beta$ est bien un réel.

14°) $0_{\mathbb{R}}$ doit correspondre au rationnel 0 *vu comme* un réel. Il est donc naturel de poser $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < 0\}$. C'est bien un réel d'après la première question.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \alpha + 0_{\mathbb{R}}$. Il existe $y \in \alpha$ et $z \in 0_{\mathbb{R}}$ tels que $x = y + z$.
$z < 0$, donc $x = y + z < y$. Si $x \notin \alpha$, α étant un réel tel que $y \in \alpha$, alors $y < x$, ce qui est faux, donc $x \in \alpha$. Ceci démontre que $\alpha + 0_{\mathbb{R}} \subset \alpha$.
Réciproquement, supposons que $x \in \alpha$. α est un réel, donc il ne possède pas de maximum. En particulier, il existe $y \in \alpha$ tel que $x < y$. Ainsi $x = y + z$ avec $z \in \mathbb{Q}_-^*$. Donc $z \in 0_{\mathbb{R}}$ puis $x = y + z \in \alpha + 0_{\mathbb{R}}$. Ceci démontre que $\alpha + 0_{\mathbb{R}} \supset \alpha$.
Ainsi, on a montré que $\alpha + 0_{\mathbb{R}} = \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

15°) Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$.
$\diamond$ α et $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ sont non vides, donc il existe $x_0 \in \alpha$ et $y_0 \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$.
Posons $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ x_0 + n\varepsilon \in \alpha\}$.
$0 \in A$, donc A est non vide.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $x_0 + n\varepsilon \geq y_0 \iff n \geq \dfrac{y_0 - x_0}{\varepsilon}$. Or il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{y_0 - x_0}{\varepsilon} = \dfrac{p}{q}$. Posons $N = |p|$. Alors $N \geq \frac{|p|}{q} \geq \frac{p}{q}$, donc $x_0 + N\varepsilon \geq y_0$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \in A$. Alors $x_0 + n\varepsilon \in \alpha$, or $y_0 \notin \alpha$, donc $x_0 + n\varepsilon < y_0 \leq x_0 + N\varepsilon$. En travaillant dans $\mathbb{Q}$, on en déduit que $n \leq N$, donc A est majoré.
$\diamond$ A étant non vide et majoré, il possède un maximum noté m. Posons $x = x_0 + m\varepsilon$ et $y = x_0 + (m+1)\varepsilon$. Par construction de m, $x \in \alpha$ et $y \notin \alpha$. De plus, $y = x + \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) *Premier cas :* On suppose que α n'est pas du type 1.
Posons $\beta = \{-x \ / \ x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha\}$ et montrons déjà que β est un réel.
On utilisera que, pour tout $y \in \mathbb{Q}$, $y \in \beta \iff -y \notin \alpha$.
$\diamond$ $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ est non vide et différent de $\mathbb{Q}$, donc β est non vide et différent de $\mathbb{Q}$.
$\diamond$ Soit $x \in \beta$ et $y \in \mathbb{Q} \setminus \beta$.
Alors $-x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ et $-y \in \alpha$, or α est un réel, donc $-y < -x$, puis en travaillant dans $\mathbb{Q}$, $x < y$.
$\diamond$ Supposons que β possède un maximum dans $\mathbb{Q}$, noté m.
Alors $-m \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$.
α étant un réel, pour tout $x \in \alpha$, $x < -m$.
Réciproquement, supposons que $x \in \mathbb{Q}$ avec $x < -m$. Alors $-x > m$, donc $-x \notin \beta$, donc $x \in \alpha$.
Ainsi, par double inclusion, on a montré que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < -m\}$, donc α est du type 1, ce qui est faux. Ainsi, β ne possède pas de maximum.
On a donc bien montré que β est un réel.
Montrons maintenant que $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$.
$\diamond$ Soit $x \in \alpha + \beta$. Il existe $y \in \alpha$ et $z \in \beta$ tels que $x = y + z$.
$-z \notin \alpha$ et α est un réel, donc $y < -z$. Ainsi, $x = y + z < 0$, donc $x \in 0_{\mathbb{R}}$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $x \in 0_{\mathbb{R}}$. Posons $\varepsilon = -x \in \mathbb{Q}_+^*$.
D'après la question précédente, il existe $x' \in \alpha$ et $y' \notin \alpha$ tel que $y' = x' + \varepsilon$.
Ainsi, $x = -\varepsilon = x' + (-y')$ avec $x' \in \alpha$ et $-y' \in \beta$, donc $x \in \alpha + \beta$.
On a donc montré par double inclusion que $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$, ce qui conclut dans ce cas.

Second cas : On suppose que α est du type 1.
Ainsi, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < a\}$.
Posons alors $\beta = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < -a\}$. $\beta \in \mathbb{R}$ d'après la première question.
Montrons que $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$.
Soit $x \in \alpha + \beta$. Il existe $y \in \alpha$ et $z \in \beta$ tels que $x = y + z$,
donc $x < a + (-a) = 0$. Ainsi, $x < 0$.
Réciproquement, supposons que $x < 0$. Posons $\varepsilon = -\frac{x}{2} \in \mathbb{Q}_+^*$.
Alors $a - \varepsilon \in \alpha$ et $-a - \varepsilon \in \beta$, donc $x = -2\varepsilon = (a - \varepsilon) + (-a - \varepsilon) \in \alpha + \beta$.
Ainsi, par double inclusion, on a montré que $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$, ce qui conclut.

Partie IV : Produit de deux réels.

17°) $\diamond$ Montrons que 1) $\Longrightarrow$ 2).
Supposons que $\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$. Alors $\mathbb{Q}_-^* \subset \alpha$ et $\mathbb{Q}_-^* \neq \alpha$.
Il existe donc $x \in \alpha$ tel que $x \geq 0$.
α est un réel, donc si $0 \notin \alpha$, alors $x < 0$, ce qui est faux, donc $0 \in \alpha$, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ Montrons que 2) $\Longrightarrow$ 3) ; Supposons que $0 \in \alpha$.
α étant un réel, il n'admet pas de maximum, donc il existe $x \in \alpha$ tel que $x > 0$. Ainsi, $\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ est non vide.
$\diamond$ Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 1) ; Supposons que $\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ est non vide.
Il existe $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$.
Soit $x \in \mathbb{Q}_-^*$. Si $x \notin \alpha$, α étant un réel contenant y, $y < x$ ce qui est faux. Ainsi $x \in \alpha$, donc $\mathbb{Q}_-^* \subset \alpha$, c'est-à-dire $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} \alpha$. De plus $0_{\mathbb{R}} \neq \alpha$ car $y \in \alpha$ et $y \notin 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi, $\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$.

18°) On adapte la démonstration de la question 13.
$\diamond$ Par construction, $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\beta$, donc $\alpha\beta$ est non vide.
$\diamond$ Il existe $x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ et $y \in \mathbb{Q} \setminus \beta$. D'après la question précédente, $\mathbb{Q}_-$ est inclus dans α et dans β, donc $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$.
Supposons que $xy \in \alpha\beta$.
$xy > 0$, donc il existe $x' \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ et $y' \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*$ tels que $xy = x'y'$.
$x' \in \alpha$ et $x \notin \alpha$, donc $x < x'$. De même, $y < y'$. Or x et y sont strictement positifs, donc en travaillant dans $\mathbb{Q}$, $xy < x'y' = xy$, ce qui est faux. Ainsi $xy \notin \alpha\beta$, ce qui prouve que $\alpha\beta$ est différent de $\mathbb{Q}$.
$\diamond$ Soit $x \in \alpha\beta$ et $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha\beta$. $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\beta$, donc $y > 0$.
Si $x \leq 0$, alors $x < y$. On peut donc supposer que $x > 0$.
Alors il existe $y' \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ et $z' \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*$ tels que $x = y'z'$.
Posons $z'' = \frac{y}{y'}$, de sorte que $y = y'z''$.
$y \notin \alpha\beta$, donc $z'' \notin \beta$ (sinon, $z'' \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*$, donc $y = y'z'' \in \alpha\beta$). Or $z' \in \beta$ et β est un réel, donc $z' < z''$. De plus, $y' > 0$, donc $x = y'z' < y'z'' = y$, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ Supposons que $\alpha\beta$ possède un maximum noté m. D'après la question précédente, il existe $x' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$ et $y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$, donc $x'y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha\beta$. Ainsi, $m > 0$.
Il existe donc $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$ et $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$ tels que $m = xy$.
α ne possède pas de maximum, donc il existe $x' > x$ tel que $x' \in \alpha$. Alors $x'y \in \alpha\beta$ et $x'y > xy = m$ ce qui est impossible. Ainsi, $\alpha\beta$ ne possède pas de maximum.
En conclusion, on a bien montré que $\alpha\beta$ est un réel.
$\diamond$ Par construction, $\mathbb{Q}_- \subset \alpha\beta$, donc $0 \in \alpha\beta$,
donc d'après la question précédente, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

19°) On suppose que $\alpha <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$. Alors d'après la question 12, $\alpha + (-\alpha) \leq_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} + (-\alpha)$, donc $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} -\alpha$. or $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$, donc $-\alpha \neq -0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ (propriétés usuelles dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$). Ainsi, on a montré que $0 <_{\mathbb{R}} (-\alpha)$.

20°) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 18, $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après la définition 3, $\mathbb{Q}_- \subset (\alpha\beta)\gamma$ et $\mathbb{Q}_- \subset \alpha(\beta\gamma)$.

Il reste donc à montrer que $\mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)\gamma = \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha(\beta\gamma)$.
Soit $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)\gamma$. Alors il existe $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)$ et $z \in \mathbb{Q}_+^* \cap \gamma$ tels que $x = yz$. Toujours d'après la définition 3, il existe $r \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$ et $s \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$ tels que $y = rs$. Ainsi, d'après l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$, $x = (rs)z = r(sz)$. Or $sz \in \beta\gamma$, donc $x \in \alpha(\beta\gamma) \cap \mathbb{Q}_+^*$. Ceci démontre que $\mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)\gamma \subset \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha(\beta\gamma)$.
L'inclusion réciproque se démontre de la même façon.

21°) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$.
$\diamond$ $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, donc d'après la question 17, $0 \in \beta$. De même, $0 \in \gamma$. Alors $0 = 0+0 \in \beta+\gamma$, donc $\beta + \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, d'après la définition 3, $\mathbb{Q}_- \subset \alpha(\beta + \gamma)$.
De même, $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ sont strictement positifs, donc $0 \in (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$, or $(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ est un réel, donc $\mathbb{Q}_- \subset (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$.
Ainsi, il reste à démontrer que $\mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)] = \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)]$.
$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta+\gamma)]$. Il existe $y \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$ et $y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\beta+\gamma)$ tels que $x = yy'$.
Il existe $t \in \beta$ et $z \in \gamma$ tels que $y' = t + z$.
Si $t, z \in \mathbb{Q}_+^*$, alors par distributivité dans $\mathbb{Q}$ de la multiplication par rapport à l'addition, $x = y(t + z) = (yt) + (yz) \in [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)]$.
Si $t \leq 0$, $y' \leq z$, or $y > 0$, donc $x = yy' \leq yz$, or $y > 0$, $z > 0$, $y \in \alpha$ et $z \in \gamma$, donc $yz \in \alpha\gamma$, mais $\alpha\gamma$ est un réel, donc $x \in \alpha\gamma$, or $0 \in \alpha\beta$, donc $x \in (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$. On conclut de même si $z \leq 0$.
Ainsi, dans tous les cas, $x \in (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$,
donc on a montré que $\mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)] \subset \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)]$.
$\diamond$ Réciproquement, soit $x \in \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)]$.
Il existe $b \in \alpha\beta$ et $g \in \alpha\gamma$ tels que $x = b + g$.
Si $b \leq 0$, $g = x - b > 0$, donc $g = x'y'$ avec $x' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$ et $y' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \gamma$.
Posons $z = \frac{x}{x'}$, de sorte que $x = x'z$.
Alors $x'z = x \leq g = x'y'$, or $x' > 0$, donc $z \leq y' \in \gamma$. Or γ est un réel, donc $z \in \gamma$, puis $z = 0 + z \in \beta + \gamma$, or $z > 0$, donc $x = x'z \in [\alpha(\beta + \gamma)]$.
On conclut de la même façon lorsque $g \leq 0$.
Il reste à étudier le cas où $b, g \in \mathbb{Q}_+^*$. Dans ce cas, $b \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\beta)$ et $g \in \mathbb{Q}_+^* \cap (\alpha\gamma)$, donc il existe $a, a' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \alpha$, $b' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \beta$ et $g' \in \mathbb{Q}_+^* \cap \gamma$ tels que $b = ab'$ et $g = a'g'$.
Posons $a'' = \max(a, a') \in \mathbb{Q}_+^*$ et $u = \frac{x}{a''}$, de sorte que $x = a''u$.
Alors $a''u = x = (ab') + (a'g') \leq a''(b' + g')$, or $a'' > 0$, donc $u \leq b' + g' \in (\beta + \gamma)$, mais $\beta + \gamma$ est un réel, donc $u \in (\beta + \gamma)$. De plus $u > 0$, donc $x = a''u \in [\alpha(\beta + \gamma)]$.
Ainsi, dans tous les cas, on a montré que $x \in [\alpha(\beta + \gamma)]$,
ce qui montre que $\mathbb{Q}_+^* \cap [\alpha(\beta + \gamma)] \supset \mathbb{Q}_+^* \cap [(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)]$.

22°) $\diamond$ Posons $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < 1\}$. D'après la première question, $1_{\mathbb{R}}$ est un réel. De plus, $0 \in 1_{\mathbb{R}}$, donc $1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$, alors d'après la définition 4, $1_{\mathbb{R}}\alpha = 0_{\mathbb{R}} = \alpha$.
Supposons maintenant que $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$.
$\diamond$ Supposons d'abord que $\alpha >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$.
Soit $x \in 1_{\mathbb{R}}\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$. Alors il existe $y \in 1_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}_+^*$ et $z \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$ tels que $x = yz$. On a $0 < y < 1$, donc $x < z \in \alpha$. Or α est un réel, donc $x \in \alpha$.

Réciproquement, soit $x \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$. α n'admet aucun maximum, donc il existe $y \in \alpha$ tel que $x < y$. Alors $x = zy$ où $z \in 1_\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}_+^*$, donc $x \in 1_\mathbb{R}\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$.
On a ainsi montré que $\alpha \cap \mathbb{Q}_+^* = 1_\mathbb{R}\alpha \cap \mathbb{Q}_+^*$, or α et $1_\mathbb{R}\alpha$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, donc ils contiennent tous les deux $\mathbb{Q}_-$. Ainsi, $1_\mathbb{R}\alpha = \alpha$.
$\diamond$ Supposons maintenant que $\alpha \notin \mathbb{R}_+^*$. La relation d'ordre $\leq_\mathbb{R}$ étant totale d'après la question 7, $\alpha \leq_\mathbb{R} 0_\mathbb{R}$, or $\alpha \neq 0_\mathbb{R}$, donc $\alpha <_\mathbb{R} 0_\mathbb{R}$. Alors d'après la question 19, $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, d'après le cas précédent, $1_\mathbb{R}(-\alpha) = -\alpha$. Alors d'après la définition 4, $1_\mathbb{R}\alpha = -(1_\mathbb{R}(-\alpha)) = -(-\alpha)$. Or $-(-\alpha) = -(-\alpha) + 0_\mathbb{R} = -(-\alpha) + \alpha + (-\alpha)$, donc par commutativité et associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$, $-(-\alpha) = -(-\alpha) + (-\alpha) + \alpha = \alpha$.
Ainsi, on a montré que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $1_\mathbb{R}\alpha = \alpha$.

23°) Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, posons $f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x < a\}$. D'après la première question, f est une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
D'après les questions 14 et 22, $f(0) = 0_\mathbb{R}$ et $f(1) = 1_\mathbb{R}$.
$\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Soit $x \in f(a) + f(b)$. Il exite $y \in f(a)$ et $z \in f(b)$ tels que $x = y + z$. Alors $x < a + b$, donc $x \in f(a + b)$.
Réciproquement, supposons que $x \in f(a + b)$. Ainsi, $x < a + b$.
Posons $\varepsilon = a + b - x \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors $x = a + b - \varepsilon = (a - \frac{\varepsilon}{2}) + (b - \frac{\varepsilon}{2}) \in f(a) + f(b)$.
Ainsi, pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
$\diamond$ Soit $a \in \mathbb{Q}$. Alors $f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0) = 0_\mathbb{R}$, donc $f(-a) = -f(a)$.
$\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors $0 \in f(a)$ et $0 \in f(b)$, donc $f(a), f(b) \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in f(a)f(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$. Alors $x = yz$, où $y \in f(a) \cap \mathbb{Q}_+^*$ et $z \in f(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$. On a donc $0 < y < a$ et $0 < z < b$, donc $x = yz < ab$. Ainsi $x \in f(ab)$.
Ceci démontre que $f(a)f(b) \cap \mathbb{Q}_+^* \subset f(ab) \cap \mathbb{Q}_+^*$.
Réciproquement, soit $x \in f(ab) \cap \mathbb{Q}_+^*$. Ainsi, $0 < x < ab$.
Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p > \frac{b}{ab - x}$. Alors $ab - x > \frac{b}{p}$.
On en déduit que $ab > x + \frac{b}{p} > \frac{b}{p}$, donc $a > \frac{1}{p}$.
Posons $y = \dfrac{x}{a - \frac{1}{p}} \in \mathbb{Q}_+^*$, de sorte que $x = (a - \frac{1}{p})y$.
On a $(a - \frac{1}{p})y = x < ab - \frac{b}{p} = b(a - \frac{1}{p})$, et $a - \frac{1}{p} > 0$, donc $y < b$. Ainsi, $x = (a - \frac{1}{p})y$ avec $0 < a - \frac{1}{p} < a$ et $0 < y < b$, donc $x \in f(a)f(b) \cap \mathbb{Q}_+^*$.
On en déduit que $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$.
Cette égalité reste évidemment vraie si $a = 0$ ou $b = 0$.
Si $a \in \mathbb{Q}_-^*$ et $b \in \mathbb{Q}_+^*$, $f(ab) = f(-(-a)b) = -f((-a)b) = -f(-a)f(b) = f(a)f(b)$.
On procède de même dans les autres cas, donc pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$, $f(ab) = f(a)f(b)$.
$\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a < b$. Alors $f(a) \subset f(b)$ et $f(a) \neq f(b)$, donc f est une application strictement croissante. On en déduit facilement qu'elle est injective.
En conclusion, $f|_\mathbb{Q}^{f(\mathbb{Q})}$ est une bijection de $\mathbb{Q}$ dans une partie de $\mathbb{R}$, qui transporte 0, 1, l'addition, la multiplication et l'ordre usuel de $\mathbb{Q}$. On peut donc identifier $\mathbb{Q}$ avec $f(\mathbb{Q})$ qui est une partie de $\mathbb{R}$. Ceci achève la construction de $\mathbb{R}$ selon les coupures de Dedekind : $\mathbb{R}$ est bien un sur-corps de $\mathbb{Q}$, totalement ordonné et vérifiant la propriété de la borne supérieure.