Feuille d'exercices 6.
Corrigé de l'exercice 13.

Exercice 6.13 :

$\diamond$ Supposons d'abord que $x \in]0,1]$. Alors $n \longmapsto \lfloor nx \rfloor$ est une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui prouve le résultat. En effet, c'est évident lorsque $x = 1$ et si $x \in]0,1[$, soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $n = \lfloor \frac{N}{x} \rfloor$. Alors $n \leq \frac{N}{x} < n+1$, donc $nx \leq N < nx + x < nx + 1 \leq N + 1$. Ainsi, $N = \lfloor (n+1)x \rfloor$.

$\diamond$ On suppose maintenant que $x \in]1,2[$.

Soit $w \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$2^w = \lfloor nx \rfloor \Longleftrightarrow 2^w \leq nx < 2^w + 1 \Longleftrightarrow 2^w \frac{1}{x} \leq n < 2^w \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$.
Ainsi $2^w \in A$ si et seulement si il existe un entier dans l'intervalle $[2^w \frac{1}{x}, 2^w \frac{1}{x} + \frac{1}{x}[$.
$\frac{1}{x} \in]\frac{1}{2}, 1[$, donc son développement en base 2 est de la forme

$\frac{1}{x} = 0,1v_2v_3\cdots v_n\cdots = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n 2^{-n}$, où $(v_n)_{n\geq 2}$ est une suite d'éléments de $\{0,1\}$ qui ne vaut pas constamment 1 à partir d'un certain rang.

Alors $2^w \frac{1}{x} = v_1v_2\cdots v_w, v_{w+1}\cdots$ en convenant que $v_1 = 1$
et $2^w \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = v_1v_2\cdots v_w, v_{w+1}\cdots + 0,1v_2v_3\cdots v_n\cdots$.
Supposons que $v_{w+1} = 1$. Alors
$2^w \frac{1}{x} \leq v_1v_2\cdots v_w + 1 = v_1v_2\cdots v_w, 1 + 0,1 < v_1v_2\cdots v_w, v_{w+1}\cdots + 0,1v_2v_3\cdots v_n\cdots$,
car $0,1v_2v_3\cdots v_n\cdots = \frac{1}{x} > \frac{1}{2} = 0,1$. Ainsi, $2^w \frac{1}{x} \leq v_1v_2\cdots v_w + 1 < 2^w \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$.
Ainsi, lorsque $v_{w+1} = 1$, $2^w \in A$.
Lorsque le développement en base 2 de $\frac{1}{x}$ possède une infinité de 1, on a donc montré que A possède une infinité de puissances de 2. Sinon, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $v_n = 0$. Alors, pour tout $n \geq N$, $2^n \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$, donc il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $2^n = ix$. Alors $2^n = \lfloor ix \rfloor \in A$ et A contient aussi une infinité de puissances de 2, ce qui conclut.