Feuille d'exercices 7.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 7.11 :

Soit $x \in E$. Notons y son symétrique à droite et notons z le symétrique à droite de y.
Alors $yx = yxe = (yx)(yz) = y(xy)z = yez = yz = e$
et $ex = (xy)x = x(yx) = xe = x$, donc y est le symétrique de x et e est l'élément neutre, ce qui prouve que E est un groupe.

Exercice 7.17 :

1°) $\diamond$ Supposons qu'il existe une application h de E dans F telle que $g = f \circ h$.
On conseille de représenter les ensembles E, F, G et les applications f, g, h sur un diagramme.
Alors $g(E) = f(h(E)) \subset f(F)$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $g(E) \subset f(F)$.
Soit $x \in E$. Alors $g(x) \in f(F)$, donc il existe $h(x) \in F$ tel que $g(x) = f(h(x))$.
Alors, en utilisant l'axiome du choix, il existe $h \in \mathcal{F}(E, F)$ telle que $g = f \circ h$.
En conclusion, la CNS cherchée est $g(E) \subset f(F)$.

2°) Supposons que $g(E) \subset f(F)$.
Lorsque $x \in E$, $g(x) = f(h(x))$ si et seulement si $h(x)$ est un antécédent par f de $g(x)$, donc $h(x)$ est unique si et seulement si $g(x)$ admet un unique antécédent par f. Ainsi, h est unique si et seulement si pour tout $x \in E$, $g(x)$ admet un unique antécédent par f. Montrons que cette dernière propriété est équivalente à l'injectivité de $f|_{f^{-1}(g(E))}$.
Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $g(x) = f(t) = f(t')$ avec $t, t' \in F$ et $t \neq t'$.
$f(t) = g(x) \in g(E)$, donc $t \in f^{-1}(g(E))$. De même $t' \in f^{-1}(g(E))$, donc $f|_{f^{-1}(g(E))}$ n'est pas injective.
Réciproquement, si $f|_{f^{-1}(g(E))}$ n'est pas injective, il existe $t, t' \in f^{-1}(g(E))$ tels que $f(t) = f(t')$ et $t \neq t'$. Alors $f(t) \in g(E)$, donc il existe $x \in E$ tel que $g(x) = f(t) = f(t')$.
Alors $g(x)$ admet 2 antécédents au moins par f.
En conclusion, la CNS d'unicité de h est l'injectivité de $f|_{f^{-1}(g(E))}$.

3°) $\diamond$ Supposons qu'il existe une application h de F dans G telle que $g = h \circ f$. On pourra à nouveau représenter les ensembles E, F, G et les applications f, g, h sur un diagramme.
Alors, pour tout $x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)$.

◇ Réciproquement, supposons que : $\forall x, y \in E \ \ (f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y))$.
Soit $y \in F$. Si $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On peut alors poser $h(y) = g(x)$, car pour tout autre élément $x' \in E$ tel que $y = f(x')$, par hypothèse, $g(x) = g(x')$.
Si $y \notin f(E)$, on pose $h(y) = g$, où g est un élément quelconque G, ce qui nécessite de supposer que G est non vide.
On a ainsi défini, une application h de F dans G telle que, pour tout $x \in E$,
$h(f(x)) = g(x)$, donc telle que $g = h \circ f$.
Dans le cas où G est vide, l'existence de l'application g implique que E est aussi vide, donc f est l'application vide de E dans F. Alors pour tout application h de F dans G, $h \circ f$ et g sont égales, car égales à l'application vide de E dans G, donc la CNS cherchée est l'existence d'une application de F dans $\emptyset = G$, ce qui est vrai si et seulement si F est vide.
En conclusion, on a montré que la CNS cherchée est $G = F = \emptyset$ ou bien
$[G \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in E \ \ (f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y))]$.
◇ On suppose que cette condition est remplie et on étudie l'unicité de h.
Lors de la construction précédente de h, pour $y \in f(E)$, la valeur de $h(y)$ est unique, donc lorsque f est surjective, h est unique.
Si f n'est pas surjective et que G possède au moins deux éléments g et g', lorsque $y \in F \setminus f(E)$, on peut choisir $h(y) = g$ ou $h(y) = g'$, donc il n'y a pas unicité de h.
Si f n'est pas surjective mais que G est un singleton, alors h reste unique car de toute façon, dans ce cas, il existe une unique application de F dans G.
Enfin, si $E = F = G = \emptyset$, h est unique, égale à la bijection vide.

Exercice 7.18 :

On conseille de commencer par représenter les différents ensembles et les différentes applications sur un diagramme.
D'après le cours, s étant surjective, elle est inversible à droite : il existe $s' \ : \ F \longrightarrow E$ telle que $ss' = Id_F$.
Si l'on suppose que $G \neq \emptyset$, alors i étant injective, elle est inversible à gauche : il existe $i' \ : \ H \longrightarrow G$ telle que $i'i = Id_H$.
Supposons qu'il existe $h \ : \ F \longrightarrow G$ telle que $f = hs$ et $g = ih$. Alors $h = hss' = fs'$ et $h = i'ih = i'g$. Ceci prouve l'unicité sous condition d'existence.
On sait que $if = gs$, donc $i'ifs' = i'gss'$, puis $fs' = i'g$.
On peut donc poser $h = fs' = i'g \in \mathcal{F}(F, G)$.
On vérifie que $hs = i'gs = i'if = f$ et $ih = ifs' = gss' = g$, donc h est une solution.

Etudions le cas où $G = \emptyset$. On en déduit successivement que $E = \emptyset$ car f existe, $F = \emptyset$ car s est surjective, h est nécessairement l'application vide car elle part de $F = \emptyset$, donc il y a déjà unicité, g est l'application vide également, donc on a bien $f = hs$ et $g = ih$.