

Résumé de cours :

Semaine 10, du 17 au 21 novembre.

1 Sommes finies (suite et fin)

1.1 Les coefficients binomiaux (suite et fin)

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1 a_2 = a_2 a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_1^k a_2^{n-k}.$$

Les deux preuves sont à connaître.

Formule du multinôme : (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \dots, a_p$ p éléments d'un anneau A qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \dots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1 + \dots + i_p = n}} \frac{n!}{i_1! \times \dots \times i_p!} a_1^{i_1} \times \dots \times a_p^{i_p}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Il faut savoir le démontrer.

1.2 Quelques techniques

1.2.1 Télescopage

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m \text{ et } \sum_{k=m+1}^{n+1} (u_{k-1} - u_k) = u_m - u_{n+1}.$$

1.2.2 Séparation des indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2p+1}.$$

1.2.3 Fonction génératrice

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$ et soit $(u_k)_{m \leq k \leq n}$ une famille de complexes. La fonction génératrice de cette famille est l'application polynomiale $P : x \mapsto \sum_{k=m}^n u_k x^k$.

Si P est connu, on peut en déduire plusieurs sommes : $\sum_{k=m}^n u_k = P(1)$, $\sum_{k=m}^n k u_k = P'(1)$,

$$\sum_{k=m}^n k(k-1)u_k = P''(1), \quad \sum_{k=m}^n \frac{u_k}{k+1} = \int_0^1 P(t)dt \text{ etc.}$$

1.2.4 Quelques formules

Formule de Bernoulli : Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soit a et b deux éléments de A qui commutent (i.e $ab = ba$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$.

Il faut savoir le démontrer.

Somme géométrique : Une suite (u_n) de complexes est géométrique de raison r si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r u_n$. Dans ce cas, $u_n = u_0 r^n$ et $\sum_{k=m}^n u_k = \frac{u_{n+1} - u_m}{r - 1}$.

1.2.5 Sommes doubles

$$\sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ p \leq \ell \leq q}} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^n \sum_{\ell=p}^q u_{k,\ell} = \sum_{\ell=p}^q \sum_{k=m}^n u_{k,\ell}.$$

Propriété. Dans un anneau, $\sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ p \leq \ell \leq q}} v_k w_\ell = \left(\sum_{k=m}^n v_k \right) \left(\sum_{\ell=p}^q w_\ell \right)$.

1.2.6 Sommes triangulaires

$$\sum_{m \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^n \sum_{\ell=k}^n u_{k,\ell} = \sum_{\ell=m}^n \sum_{k=m}^{\ell} u_{k,\ell}.$$

Il faut savoir le démontrer.

1.2.7 Produits

Toutes les propriétés précédentes, lorsqu'elles étaient valables dans un monoïde commutatif $(G, +)$ sont valables en notation multiplicative dans un monoïde commutatif $(G, \times)$.

2 Construction de $\mathbb{C}$

2.1 Structure de corps

Propriété. $\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps et dont les lois sont définies par

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \times (c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{cases}$$

Si $z \neq 0$, l'inverse de $z = a + ib$ est $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Définition. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! a, b \in \mathbb{R}, z = a + ib$. On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

L'écriture du complexe z sous la forme $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ s'appelle l'écriture algébrique de z .

Définition. Les imaginaires purs sont les ib où $b \in \mathbb{R}$.

Propriété. Comme pour tout corps, $\mathbb{C}$ est intègre, c'est-à-dire que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriété. $\frac{1}{i} = -i$.

Linéarité des parties réelle et imaginaire : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(\alpha z + z') = \alpha \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(\alpha z + z') = \alpha \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$.

3 Le plan complexe

Définition. On considère un plan P affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors définir le complexe $z = x + iy$ et le point M de P dont les coordonnées dans le repère R sont (x, y) . On dit que z est l'afixe du point M et que M est l'image du complexe z .

Si l'on note $M(z)$ l'image du complexe z , l'application $z \mapsto M(z)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans P qui permet parfois d'identifier $\mathbb{C}$ avec P (muni de son repère R).

On dit également que z est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z .

Si l'on note $\overrightarrow{u(z)}$ le vecteur image de z , l'application $z \mapsto \overrightarrow{u(z)}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des vecteurs de P .

Pour ces raisons, $\mathbb{C}$ est souvent appelé le plan complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes :

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Avec les notations précédentes, notons $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_{z'}}$ les vecteurs images de z et z' . Alors le vecteur $\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{u_{z'}}$ a pour affixe $z + z'$.

Ainsi, si l'on identifie $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des vecteurs de P , l'addition entre complexes correspond à l'addition entre vecteurs du plan.

Si l'on visualise les deux complexes z et z' par deux points M_z et $M_{z'}$ du plan P , le complexe $z + z'$ est donc le point qui complète $O, M_z, M_{z'}$ en un parallélogramme.

Interprétation géométrique de la différence de deux complexes :

Avec les mêmes notations, $z' - z$ est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Définition. L'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation suivante du plan :

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow P \\ M &\longmapsto \Omega + \lambda \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αz est l'afixe du vecteur $\alpha \overrightarrow{OM(z)}$.

Ainsi, αz est aussi l'afixe de l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre O et de rapport α .

4 La conjugaison

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le conjugué du complexe z est le complexe $\bar{z} \triangleq x - iy$.

Géométriquement, $\bar{z}$ est le symétrique de z selon l'axe Ox des réels.

Propriété. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

5 Le module

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le module du complexe $z = x + iy$ est $|z| \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Interprétation géométrique :

$|z|$ désigne la distance du point $M(z)$ à l'origine, ainsi que la norme du vecteur $\overrightarrow{u(z)}$.
La distance entre $M(z)$ et $M(z')$ est égale à $|z - z'|$.

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

- $|z| = |\bar{z}|$ (compatibilité du module avec la conjugaison) ;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ (compatibilité du module avec la multiplication) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$;
- si $z \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.

Propriété. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'application $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $|z| \geq 0$ (positivité),
- $|z| = 0 \iff z = 0$ (séparation),
- $|\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ (homogénéité),
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Il faut savoir le démontrer.

Distance entre complexes : Lorsque $x, y \in \mathbb{C}$, la quantité $d(x, y) = |x - y|$ est appelée la distance entre les deux complexes x et y .

La fonction distance vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$,

- Positivité : $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$.
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$: d permet de *séparer* les complexes.
- Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$.
- Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq r\}$. C'est le disque de centre a et de rayon r .
- Lorsque $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est $B_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / d(a, z) < r\}$. C'est le disque ouvert de centre a et de rayon r .
- La sphère de centre a et de rayon r est $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / d(a, z) = r\}$. C'est le cercle de centre a et de rayon r .

Définition. $S(0, 1)$ s'appelle la sphère unité ou bien le cercle unité. Il est noté $\mathbb{U}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Théorème.

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou bien $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.

Il faut savoir le démontrer.

Généralisation : (hors programme) $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$, avec égalité si et seulement si, pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $(z_j = 0) \vee (\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire de l'inégalité triangulaire :

- Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'||| \leq |z - z'|$.
- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie A de $\mathbb{C}$ est bornée si et seulement si il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leq R$, c'est-à-dire si et seulement si A est incluse dans un disque centré en 0.

6 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

6.1 Fonctions bornées

Définition. Soit E un ensemble quelconque et f une application de E dans $\mathbb{C}$.

On dit que f est bornée sur E si et seulement si $\{f(x)/x \in E\}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Notation. Soit f une application d'un ensemble E dans $\mathbb{C}$.

On note $\text{Re}(f) : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{Im}(f) : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto \text{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \text{Im}(f(x))$. On les appelle les parties réelle et imaginaire de l'application f .

Propriété. Avec ces notations, f est bornée sur E si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont bornées.

6.2 Dérivation

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On verra plus loin que f est continue (resp : dérivable, k fois dérivable, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) si et seulement si les applications $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont continues (resp : dérivables, k fois dérivables, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). De plus, lorsque f est k fois dérivable, où $k \in \mathbb{N}^*$, on verra que, pour tout $t \in I$, $f^{(k)}(t) = [\text{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\text{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

Propriété. Les formules suivantes, déjà admises pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont aussi valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que nous le démontrerons plus tard.

Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies. :

- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
- Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(f^n)' = n f' \times f^{n-1}$.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

6.3 Intégration

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

Remarque. Ainsi, $\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$.

On admettra pour le moment que les intégrales vérifient les propriétés suivantes :

Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a, b \in I$.

- Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)| dt$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.

On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.

Si F_0 est une primitive de f , alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.

Soit $x_0 \in I$. Alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0 .

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.

Si F est une primitive de f , alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \triangleq [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est C^1 de I dans $\mathbb{C}$, pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture " $\int f(t) dt = F(t) + k, t \in I$ " signifiera que f est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k/k \in \mathbb{C}\}$.

Changement de variable :

si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et si $\varphi : J \rightarrow I$ est de classe C^1 , alors $\forall (\alpha, \beta) \in J^2$

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$. Cette égalité correspond au changement de variable $x = \varphi(t)$.

Intégration par parties : soit $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$.

On a aussi : $\int u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) dt, \quad t \in I.$

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^{k+1} sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{h=1}^k \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Il faut savoir le démontrer.

7 L'exponentielle complexe

Définition. Une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Définition. La série de complexes $\sum z_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles

$$\left(\sum_{k=0}^n z_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite convergente. On note alors } \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n z_k.$$

Propriété. Si $\sum z_n$ est une série convergente de complexes, alors $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La réciproque est fautive : on peut avoir $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors que la série $\sum z_n$ diverge.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ est une série convergente. On dit alors que la série $\sum z_n$ est absolument convergente.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Ceci permet de

prolonger l'exponentielle réelle sur $\mathbb{C}$, en convenant que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$.

Propriété. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{\ell}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$.