Feuille d'exercices 8.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 8.1 :

Les dominos présentant le même nombre de points des deux côtés sont au nombre de 7. Pour construire un domino de l'autre type, il faut choisir une partie de deux nombres parmi $\{0, \ldots, 6\}$. Ainsi le nombre de dominos est égal à $7 + \binom{7}{2} = 7 + \frac{7 \times 6}{2} = 28$.

Exercice 8.4 :

$\diamond$ Supposons que φ est une injection de I dans J et que J est fini ou dénombrable. Alors I est en bijection avec $\varphi(J)$ qui est fini ou dénombrable en tant que partie de J. Donc I est fini ou dénombrable.

$\diamond$ Supposons que φ est une surjection de I dans J et que I est fini ou dénombrable. Alors $J = \bigcup_{i \in I} \{\varphi(i)\}$, donc J est au plus dénombrable en tant que réunion au plus dénombrable d'ensembles finis.

Exercice 8.5 :

$\diamond$ $S = \sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} b^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{8a}{b}\right)^k$.

Si $b = 8a$, alors $S = n + 1$.

Supposons que $b \neq 8a$. Alors $S = \dfrac{1 - \left(\frac{8a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{8a}{b}}$.

$\diamond$ $S' = \sum_{k=2}^{n^2} (1 - a^2)^{2k+1} = (1 - a^2) \sum_{k=2}^{n^2} (1 - a^2)^{2k}$.

$(1 - a^2)^2 = 1 \iff 1 - a^2 = \pm 1 \iff a \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, Ainsi, lorsque $a \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $S' = (1 - a^2)(n^2 - 1)$.

Sinon, $(1 - a^2)^2 \neq 1$, donc $S' = (1 - a^2)^5 \sum_{k=0}^{n^2-2} (1 - a^2)^{2k} = (1 - a^2)^5 \dfrac{1 - [(1 - a^2)^2]^{n^2-1}}{1 - (1 - a^2)^2}$.

Exercice 8.9 :

1°) Cela revient à choisir une partie de 5 boutons parmi 32, donc le nombre de cas possibles est $\binom{32}{5}$.

2°) Pour choisir un tel cas, on peut d'abord choisir les blocs utilisés, soit $\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$ choix, puis dans chaque bloc, le bouton utilisé, soit 4^5 choix. Ainsi, le nombre de choix est égal à $4^5 \times \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 57\ 344$

3°) Pour choisir un tel cas, on choisit d'abord le premier bloc utilisé, soit 8 choix, puis les boutons utilisés dans ce bloc, soit $\binom{4}{3}$ choix, puis le second bloc, soit 7 choix, puis les boutons utilisés dans le second bloc, soit $\binom{4}{2}$ choix. Le nombre de tels cas vaut donc $8 \times 4 \times 7 \times 2 \times 3 = 1\ 344$.

4°) Pour choisir un tel cas, on choisit d'abord les deux blocs d'où partiront 2 fusées, soit $\binom{8}{2}$ choix, puis pour chacun de ces deux blocs, on choisit 2 boutons parmi 4, soit $\binom{4}{2}^2$ choix, puis un dernier bloc avec une fusé, soit 6×4 choix. Le nombre de cas est égal à $(4 \times 7)(2 \times 3)^2 \times 6 \times 4 = 24\ 192$.

Exercice 8.11 :

1°) On construit par récurrence une suite (x_n) dans E de la manière suivante : $E \neq \emptyset$, car $\emptyset$ est fini, donc il existe $x_0 \in E$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $x_0, \ldots, x_{k-1}$ sont contruits et que, pour tout h, h' tels que $0 \leq h < h' \leq k-1$, $x_h \neq x_{h'}$. Alors l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_k & \longrightarrow & E \\ h & \longmapsto & x_{h-1} \end{array}$ est une injection, or E est infini, donc $E \neq f(E)$ ($f(E)$ est en bijection avec $\mathbb{N}_k$). Ainsi, il existe $x_k \in E \setminus \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$.
On a ainsi construit par récurrence une suite (x_n) d'éléments de E tels que, pour tout h, h' tels que $0 \leq h < h'$, $x_h \neq x_{h'}$.
Alors l'application $h \longmapsto x_h$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans E.

2°) Soit $x \in E$. Dans la question 1, on peut choisir $x_0 = x$.
On définit une application f de $E \setminus \{x_0\}$ dans E par :
Si $y \in E \setminus \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, alors $f(y) = y$ et
s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_n$, alors $f(y) = x_{n-1}$.
On vérifie que tout élément de E possède un antécédent et que $y \neq y' \Longrightarrow f(y) \neq f(y)$, en discutant selon que y et y' sont dans $E \setminus \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ ou dans $\{x_n / n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 8.18 :

Partons d'un ensemble constitué de N billes blanches et de M billes noires.

Pour choisir n billes parmi ces $N+M$ billes, soit $\binom{N+M}{n}$ choix, on peut d'abord décider du nombre k de billes blanches que l'on va choisir, avec $0 \leq k \leq n$, puis choisir effectivement k billes blanches, soit $\binom{N}{k}$ choix, et choisir $n-k$ billes noires, soit $\binom{M}{n-k}$ choix.

Plus formellement, soit $E = A \sqcup B$ un ensemble tel que $|A| = M$ et $|B| = N$.

L'application $\varphi\ :\ X \longmapsto (X \cap A, X \cap B)$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ est une bijection dont la bijection réciproque est $(Y, Z) \longmapsto Y \sqcup Z$.

Notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E.

Alors $\binom{N+M}{n} = |\mathcal{P}_n(E)| = |\varphi(\mathcal{P}_n(E))| = |\bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B)|$.

On peut généraliser cette formule en prenant p couleurs différentes : pour tout $p \geq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $N_1, \ldots, N_p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{N_1 + \cdots + N_p}{n} = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{N}^p \\ k_1+\cdots+k_p=n}} \binom{N_1}{k_1} \times \cdots \times \binom{N_p}{k_p}.$$